Первый тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Назовём два положительных целых числа* ***почти соседними****, если каждое из них делится (без остатка) на их разность. На уроке математики Вову попросили выписать в тетрадь все числа, почти соседние с 2^{10}. Сколько чисел ему придётся выписать?*

<u>Ответ</u>: 21. <u>Решение</u>. Число 2^{10} делится только на степени двойки: от 2^0 до 2^{10}. Поэтому почти соседними с ним могут быть только числа $2^{10}–2^9$, $2^{10}–2^8$, …, $2^{10}–2^0$, $2^{10}+2^0$, …, $2^{10}+2^{10}$ (число $0 = 2^{10}–2^{10}$ не подходит, так как не положительно). С другой стороны, легко видеть, что все эти числа действительно являются почти соседними с 2^{10}. <u>Замечание</u>. Из-за проблем с правильным отображением формул довольно многие участники вместо «2^{10}» прочитали в условии задачи «210». Задача для этого числа решается аналогично, ответ — 31.

2. *Точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно прямоугольника ABCD. Докажите, что AE < 2EF.*

<u>Первое решение</u>. $2EF = BD = AC > AE$. Последнее неравенство следует из того, что угол AEC — тупой. <u>Второе решение</u>. Пусть $BC = 2x$, $CD = 2y$. Тогда $AE^2 = x^2+4y^2 < 4x^2+4y^2 = (2EF)^2$.

3. *Пусть a, b, c — такие целые числа, что $(a+b+c)^2 = –(ab+ac+bc)$ и числа a+b, b+c, a+c не равны 0. Докажите, что произведение любых двух из чисел a+b, a+c, b+c делится на третье.*

<u>Решение</u>. $(a+b)(a+c) = a^2+ab+ac+bc = a^2–(a+b+c)^2 = –(b+c)(2a+b+c)$. Другие два случая получаются перестановкой букв.

4. *В ряд выложена 101 карточка. На каждой из 50 карточек, лежащих в этом ряду на чётных местах, нарисован значок > или <. Докажите, что, как бы ни были нарисованы эти значки, можно заполнить остальные карточки числами 1, 2, ... 51 (использовав каждое по разу) так, чтобы все получившиеся неравенства оказались верными.*

<u>Первое решение</u>. Сначала напишем над всеми карточками, лежащими на нечётных местах, по числу. Над первой карточкой напишем число 0. Затем будем двигаться вправо и каждый раз после знака «>» писать число, на 1 меньшее предыдущего, а после знака «<» — число, на 1 большее предыдущего. Очевидно, при этом каждый из знаков неравенства будет направлен от карточки, отмеченной большим числом, к карточке, отмеченной меньшим. Теперь возьмём карточки, отмеченные самым маленьким числом. Пусть их оказалось k_1 штук. Напишем на них произвольным образом числа $1,…, k_1$. На карточках, отмеченных следующим по величине числом — пусть их k_2 штук — напишем числа от k_1+1 до $k_1+ k_2$ и т.д., пока все числа от 1 до 51 не будут написаны. Из построения следует, что все написанные неравенства при этом будут верны.

<u>Второе решение</u>. Будем заполнять пустые карточки последовательно слева направо по такому алгоритму. Если сразу после текущей пустой карточки идет знак <, то пишем в нее самое маленькое из оставшихся чисел; иначе пишем самое большое из оставшихся чисел. При таком алгоритме заполнения все неравенства будут верными. В самом деле, если на текущем шаге написано число b, а до этого было написано число a, то при знаке $a < b$ неравенство верно (так как а по алгоритму a меньше всех стоящих правее чисел, в частности, меньше b), и при $a > b$ неравенство верно (так как по построению a больше всех стоящих правее чисел, в частности, больше b).

5. *Алина обвела на шахматной доске (8х8) 22 различных (но, возможно, перекрывающихся) трёхклеточных прямоугольничка, а Полина — 22 неперекрывающихся двуклеточных прямоугольничка (но, возможно, перекрывающихся с прямоугольничками Алины). Докажите, что на доску можно положить крестик из 5 клеток, полностью накрывающий хотя бы две обведённые фигурки. (Крестик может выходить за края доски.)*

<u>Решение</u>. Заметим, что крест накрывает прямоугольник 1х3, если их центральные клетки совпадают, и накрывает прямоугольник 1х2, если центральная клетка креста лежит в прямоугольнике. Отметим центральные клетки длинных прямоугольников и все клетки коротких; всего получилось 66 отмеченных клеток, значит, какая-то отмечена дважды. Если сделать её центральной клеткой креста, он накроет два прямоугольника.

Первый тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Можно ли в половину клеток доски 12x12 поместить по фишке так, чтобы в одном квадрате 2x2, составленном из клеток доски, было нечётное количество фишек, а в остальных — чётное?*

Ответ: Можно. Первое решение. Поставим по фишке в каждую клетку второй, четвертой, …, двенадцатой строк. Тогда в каждом квадрате 2x2 будет по две фишки. Теперь сдвинем фишку из левого верхнего угла на одну клетку вниз. В угловом квадрате осталось две фишки, в квадрате под ним их стало три, а во всех остальных квадратах 2x2 не поменялось вообще ничего. Второе решение. Поставим 72 фишки в прямоугольник 8x9, один из углов которого совпадает с углом квадрата. Тогда нечётное число фишек будет в единственном квадратике — том, центр которого совпадает с углом прямоугольника из фишек, противоположным углу квадрата.

2. *В треугольнике ABC угол C втрое больше угла A, а сторона AB вдвое больше стороны BC. Докажите, что угол ABC равен 60 градусам.*

Решение. Пусть D — середина стороны AB. Так как $BD = BC$, то треугольник BCD равнобедренный. Обозначим $\angle CAD = x$, $\angle ACD = y$. Тогда $\angle DCB = 3x-y$, а $\angle CDB = x+y$. Поскольку $\angle DCB = \angle CDB$, то $3x-y = x+y$, откуда $y = x$. Но тогда $DC = DA = DB = BC$, откуда треугольник BCD — равносторонний, и, следовательно, угол B равен 60 градусам.

3. *Даны 5 различных натуральных чисел. Произведение двух наименьших из них больше 25, а произведение двух наибольших — меньше 75. Найдите все эти числа (укажите все возможные варианты и докажите, что других вариантов нет).*

Решение. Обозначим эти числа в порядке возрастания a, b, c, d, e. Если b не больше 5, то a не больше 4, тогда ab не больше 20. Следовательно, b не меньше 6. Аналогично, если d не меньше 9, то e не меньше 10, и de не меньше 90. Следовательно, d не больше 8. Но такое возможно только при $b = 6$, $c = 7$, $d = 8$. Теперь из условия $25/6 < a < 6$ получаем $a = 5$, а из условия $8 < e < 75/8$ находим $e = 9$.

4. *У Али-Бабы есть 40 мешков с монетами. Джинн может по просьбе Али-Бабы определить количество монет в каждом из двух указанных ему мешков, но при этом возьмёт за работу одну монету из одного из этих мешков (и Али-Баба не увидит, из какого именно). Сможет ли Али-Баба действовать так, чтобы после не более чем 100 таких процедур точно сказать, сколько монет в данный момент лежит в каждом из мешков, кроме тех двух, которые джинн пересчитывал последними? В каждом мешке — не меньше 1000 монет.*

Ответ: Сможет. Решение. Пронумеруем мешки: 1, 2, …, 40. Определим последовательно количества монет в следующих мешках: (1, 2), (2, 3), (3, 4),...(39, 40). После второй операции мы будем точно знать число монет в мешке 1 (т.к. поймём, изменилось ли после первой операции число монет в мешке 2), после третьей — число монет в мешке 2 и т.д. Тем самым, после 39-й операции мы будем точно знать число монет во каждом из первых 38 мешков.

5. *Даны девять натуральных чисел, причём запись первого состоит только из единиц, второго — только из двоек, ..., девятого — только из девяток. Может ли произведение каких-то двух из этих чисел делиться на произведение остальных?*

Ответ: Нет. Решение. Предположим противное. Назовем два искомых числа *выбранными*. Одно из двух выбранных должно записываться пятерками, потому что никакое другое на 5 не делится. Другое должно быть четным. Но тогда наибольшая степень двойки, на которую делится произведение выбранных чисел, равна 3, а наименьшая степень двойки, на которую необходимо разделить, равна 4 (среди невыбранных чисел обязательно есть три четных, одно из которых делится на 4). Противоречие.

Первый тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *На день рождения родители дарят Дяде Фёдору сумму денег, равную произведению возраста папы на возраст мамы. Могло ли случиться, что в 2010 и 2011 годах полученные им суммы кончались на одну и ту же цифру, а сумма, полученная в 2012 году, делилась на 10?*

Ответ: Могло. Решение. Например, если в 2010 году папе Дяди Федора было 38 лет, а маме — 31 год. Замечание. Все возможные примеры — это когда возраста родителей Дяди Фёдора в 2010 г. заканчиваются на цифры 3 и 6, или когда они заканчиваются на 1 и 8. Других примеров нет.

2. *Маша упражняется в перекрашивании шахматной доски. За один раз она может изменить цвет каждой клетки в любом прямоугольнике, прилегающем к углу доски. Получится ли у неё с помощью таких операций перекрасить всю доску в один цвет?*

Ответ: Получится. Первое решение. Пронумеруем клетки доски: в верхней горизонтали слева направо номерами от 1 до 8, во второй сверху — слева направо номерами от 9 до 16 и т.д. Пусть клетка в правом нижнем углу — белая. Пусть n — наибольший номер черной клетки. Возьмем черную клетку K с этим номером и перекрасим все клетки прямоугольника, у которого одна из вершин — левая верхняя вершина доски, а вторая — правая нижняя вершина клетки K. Ни одна из клеток с номерами, большими n, в нем не лежит, так как все они правее или ниже K. Поэтому наибольший номер черной клетки после такой перекраски уменьшится. Поскольку такое уменьшение может происходить лишь конечное (не большее 63) число раз, мы, повторяя описанную процедуру, в конце концов получим белую доску. Второе решение. Перекрасим первый столбец, потом прямоугольники из первого и второго столбцов, из первого, второго и третьего столбцов, …, из 1-7 столбцов. Затем перекрасим первую строку, затем прямоугольники из первой и второй строк, из первой, второй и третьей строк, …, из 1-7 строк. Нетрудно проверить, что после этого все клетки того же цвета, что и клетка на пересечении первой строки и первого столбца, перекрасятся четное число раз, а все клетки противоположного цвета — нечетное число раз, так что вся доска окрасится в цвет клетки на пересечении первой строки и первого столбца.

3. *В треугольнике ABC $AB = BC$. На лучах CA, AB и BC отмечены соответственно точки D, E и F так, что $AD = AC$, $BE = BA$, $CF = CB$. Найдите сумму углов ADB, BEC и CFA.*

Ответ: 90°. Решение. Положим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Треугольники BAD и FCA равны ($AD = CA$, $BA = BC = FC$, $\angle BAD = 180°–\alpha = \angle FCA$). Поэтому $\angle CFA+\angle ADB = \angle ABD+\angle ADB = \alpha$ (1). С другой стороны, $EB = BA = BC$, откуда $180°–2\alpha = \angle ABC = 2\angle BEC$ и $\angle BEC = 90°–\alpha$. Складывая это равенство с равенством (1), получаем ответ.

4. *Положительные числа x и y таковы, что $x^2 > x+y$, а $x^4 > x^3+y$. Докажите, что $x^3 > x^2+y$.*

Первое решение. Перепишем условие в виде $x^2–x = x(x–1) > y$, $x^4–x^3 = x^3(x–1) > y$, Доказать надо, что $x^3–x^2 = x^2(x–1) > y$. Заметим, что $x > 1$ — иначе $x(x–1) \le 0 < y$. Но тогда $x^2(x–1) > x(x–1) > y$. Второе решение. Так как $x^2 > x+y$ и $x > 1$, $x^3 > x^2+xy > x^2+y$. Третье решение. Перемножим неравенства $x(x–1) > y$ и $x^3(x–1) > y$ (это возможно, так как $x–1 > 0$) и извлечем квадратный корень из обеих частей полученного неравенства. Получим искомое неравенство $x^2(x–1) > y$. Замечание. Как видим, условие $x^4 > x^3+y$ — лишнее, но есть и использующие его решения.

5. *40 детей стоят по кругу. Ребёнок называется* ***дылдой****, если он выше двух следующих за ним по часовой стрелке, и* ***мелким****, если он ниже обоих предшествующих ему по часовой стрелке. (Ребёнок может быть и мелким, и дылдой одновременно.) Известно, что дылд не меньше 30. Докажите, что мелких не меньше 20.*

Решение. Назовём *обычными* детей, не являющихся дылдами, а *компанией* — обычного ребенка и всех дылд, стоящих между ним и предыдущим по часовой стрелке обычным ребенком. В каждой компании все дети, кроме двух первых по часовой стрелке — мелкие, потому что каждому из них предшествуют двое дылд. Поскольку обычных детей не больше 10, компаний тоже не больше 10. Поэтому если мы удалим из каждой компании двух первых по часовой стрелке детей, останется не меньше 20 мелких, что и требовалось доказать.

Первый тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Дана дробь 2/3. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную 3/5?*

Ответ: Нельзя. Решение. Допустим, нашлись такие целые неотрицательные a и b, что $(2+2013a)/(3+2014b) = 3/5$. Тогда после сокращения числитель должен стать тройкой. Но это невозможно, потому что $2+2013a$ не делится на 3, так как 2013 делится на 3, а 2 — нет.

2. *Клетчатый прямоугольник со сторонами 629 и 630 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? Не забудьте объяснить, почему в разбиении не может получиться меньшее число квадратов с нечетной стороной.*

Ответ: Два. Решение. Пример, когда квадратов ровно два: два квадрата со стороной 315 примыкают к стороне прямоугольника длиной 630, а оставшийся прямоугольник 630×314 разрезан на квадраты 2×2. Меньшего числа квадратов с нечетной стороной быть не может: к каждой из сторон длиной 629 примыкает хотя бы один квадрат с нечетной стороной, и это не может быть один и тот же квадрат, так как тогда его сторона хотя бы 630, чего быть не может. Замечание. Одного квадрата с нечетной стороной не может быть еще и потому, что площадь прямоугольника четна, а суммарная площадь всех квадратов в таком случае нечетна.

3. *Сумасшедший конструктор создал часы с 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, ..., 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две или более стрелки, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?*

Ответ: Через 20 минут. Решение. Первая встреча стрелок случится, когда самая быстрая 150-я стрелка нагонит самую медленную первую. После этого они отвалятся, и про них можно забыть. Вторая встреча произойдёт, когда самая быстрая из оставшихся, 149-я, нагонит самую медленную из оставшихся вторую. Рассуждая аналогично далее, убеждаемся, что 74-я стрелка отвалится вместе с 77-й. Так как 77-я стрелка делает в час на три оборота больше, чем 74-я, она нагоняет 74-ю со скоростью 3 оборота в час и впервые нагонит ее через 1/3 часа.

4. *На выборах в Солнечном Городе можно было проголосовать за Винтика, Шпунтика или Кнопочку. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты набрали в сумме 146% голосов. Считавший голоса Незнайка объяснил, что по ошибке подсчитал процент голосов за Винтика не от общего числа проголосовавших, а лишь от числа голосовавших за Винтика или Шпунтика (остальные проценты он подсчитал правильно). Известно, что за Шпунтика проголосовало больше 1 000 избирателей. Докажите, что Винтик набрал больше 850 голосов.*

Решение. Пусть Шпунтик набрал a голосов, Винтик — ka голосов, Кнопочка — b голосов. По условию $ka/(a+ka)+(a+b)/(a+ka+b) = 1{,}46 \Rightarrow ka/(a+ka) > 0{,}46 \Rightarrow k > 0{,}46(1+k) \Rightarrow k > 46/54 > 0{,}85$. Так как Шпунтик набрал больше 1000 голосов, за Винтика голосовали $ka > 1000k > 1000\cdot0{,}85 = 850$ человек, что и требовалось доказать.

5. *Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника ABCDE пересекаются в точке P. Известно, что $AC = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$ и $AB+BC = CD+DE$. Докажите, что $AD = BE$.*

Решение. По условию треугольник ACE — равносторонний, откуда $\angle APB = \angle ACE = 60°$ и $\angle APE = 120°$. Положим $\varphi = \angle BEA$. Тогда $\angle DAE = 180°-\angle APE-\angle BEA = 60°-\varphi$, откуда $\angle CAD = \varphi$. Поэтому при повороте на 120° относительно центра треугольника ACE, переводящем A в E, луч AD перейдет в луч EB, а точка D — в такую точку F, что $EF = AD$ и $AF+FC = CD+DE = AB+BC$. Заметим, что если $EF < EB$, то $AF+FC < AB+BC$. В самом деле, по построению точка F лежит вне треугольника ACE, и, стало быть, внутри треугольника ABC. Продолжим AF до пересечения с BC в точке G. Тогда по неравенству треугольника $AB+BC = AB+BG+GC > AG+GC = AF+FG+GC > AF+FC$. Аналогично, если $EF > EB$, то $AF+FC > AB+BC$. Поэтому $AD = EF = EB$.

Первый тур дистанционного этапа VII олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Найдите три несократимых дроби с числителями и знаменателями, не равными 1, сумма которых — целое число, и сумма дробей, обратных к ним — тоже целое число.*

Решение. Например, 11/2, 11/6, 11/3. Замечание. Составители, естественно, имели в виду, что дроби должны быть различными. Но так как это не было явно оговорено в условии, засчитываются и ответы, где есть равные дроби, например, –1/3, –1/3, –1/3; 5/2, 5/4, 5/4 и т.п.

2. *Из натуральных чисел от 1 до 25 Даша выбрала шесть таких, что разность любых двух выбранных чисел кратна 4. Какое наибольшее количество простых чисел могла выбрать Даша?*

Ответ: Пять. Первое решение. Разность двух чисел делится на 4 тогда и только тогда, когда эти числа имеют одинаковые остатки от деления на 4. Выпишем все простые числа, меньшие 25, и их остатки от деления на 4: 2-2, 3-3, 5-1, 7-3, 11-3, 13-1, 17-1, 19-3, 23-3. Больше всего — пять — простых чисел с остатком 3, что и даёт ответ. Второе решение. Так как 5–2 = 3,13–11 = 19–17 =2, из групп простых чисел {2, 3, 5}, {11, 13}, {17, 19} Даша могла выбрать не больше, чем по одному числу. Из простых, меньших 25, в эти группы не входят только числа 7 и 23, поэтому простых чисел среди выбранных Дашей не больше пяти. Пример, когда их ровно пять, дан в первом решении.

3. *В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\angle ABM = 40°$, а $\angle CBM = 70°$. Найдите отношение $AB : BM$.*

Ответ: 2. Первое решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$. Так как диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам, точка M является точкой их пересечения и $BD = 2BM$. С другой стороны, $\angle BDA = \angle CBD = 70°$, а $\angle BAD = 180° – \angle BDA – \angle ABD = 70° = \angle BDA$, откуда $AB = BD = 2BM$ и $AB{:}BM = 2BM{:}BM = 2$. Второе решение. Заметим, что BC — биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABM. Поэтому $AB{:}BM = AC{:}CM = 2$.

4. *Различные неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2 = c^2+ab$. Докажите, что $c^2+ab < ac+bc$.*

Решение. Не умаляя общности, положим $a < b$. Тогда $c^2+ab < ac+bc \Leftrightarrow (c–b)(c–a) < 0 \Leftrightarrow a < c < b$. Докажем последнее неравенство от противного. Допустим, $c \le a$. Тогда $c^2+ab \le a^2+ab < a^2+b^2$ — противоречие. Допустим, $c \ge b$. Тогда $c^2+ab \ge b^2+ab > b^2+a^2$ — снова противоречие.

5. *Клетки квадрата $n \times n$ раскрашены в черный и белый цвет с таким условием, что никакие четыре клетки, находящиеся на пересечении двух строк и двух столбцов, не могут быть все одного цвета. Каково наибольшее возможное значение n?*

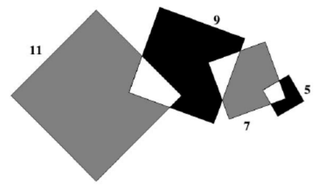
Решение. Пример для $n = 4$ показан на рисунке справа. Докажем от противного, что квадрат 5×5 таким способом раскрасить невозможно. Назовем строку *преимущественно черной*, если в ней черных квадратиков больше, чем белых, и *преимущественно белой* в противном случае. Из пяти строк найдутся либо три преимущественно черных, либо три преимущественно белых; не умаляя общности будем считать, что нашлись три преимущественно черных строки. В них минимум девять черных клеток.

Ч	Б	Ч	Б
Ч	Ч	Б	Б
Б	Ч	Ч	Б
Б	Б	Б	Ч

Теперь рассматриваем только эти три строки. Если в каком-то столбце (назовем его А) стоят три черных клетки, то на оставшиеся четыре столбца приходятся по крайней мере шесть черных клеток. Поэтому найдется столбец (назовем его Б), где есть две черные клетки. Тогда, взяв столбцы А и Б и две строки, в которых находятся две черные клетки столбца Б, получим противоречие.

Значит, в каждом столбце не больше двух черных клеток. Но это возможно только тогда, когда хотя бы в четырех столбцах по две черные клетки. Так как есть только три способа покрасить две клетки из трех в черный цвет, в каких-то двух столбцах раскраска одинакова, и мы снова получаем противоречие.

Первый тур дистанционного этапа VIII олимпиады имени Леонарда Эйлера



1. *Квадраты со сторонами 11, 9, 7 и 5 расположены примерно так, как на рисунке. Оказалось, что площадь серых частей в два раза больше, чем площадь черных частей. Найдите площадь белых частей.*

Ответ. 42. Решение. Пусть площадь белых частей равна x, а площадь чёрных частей равна y. Суммарная площадь белых и черных частей равна $9^2+5^2 = 106 = x+y$, а суммарная площадь белых и серых частей равна $11^2+7^2 = 170 = x+2y$. Вычитая из второго равенства первое, находим, что $y = 64$, откуда $x = 106–y = 42$.

2. *В подводном царстве живут осьминоги, у которых может быть 6, 7 или 8 ног. Те, у которых по 7 ног, всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. При встрече четверых осьминогов Синий сказал: «у нас на всех в сумме 25 ног», Зеленый возразил: «нет, всего ног 26», Красный сказал, что в сумме ног 27, а Жёлтый – что 28. Сколько ног в реальности у каждого из осьминогов?*

Ответ. У Красного — 6, у остальных — по 7. Решение. Если бы лгали все четверо, у них вместе было бы 28 ног, и Жёлтый был бы прав — противоречие. Значит, среди четверых есть правдивый. Он ровно один, так как любые два высказывания осьминогов противоречат друг другу. Значит, у трёх осьминогов по 7 ног, а у одного — 6 или 8. Второе невозможно, так как тогда у осьминогов вместе было бы 29 ног, в то время как ни один из осьминогов такой суммы не назвал. Значит, у правдивого 6 ног, и это Красный, назвавший правильную сумму 27.

3. *В треугольнике ABC точка M — середина AC, кроме того, $BC = 2AC/3$ и $\angle BMC= 2\angle ABM$. Найдите отношение AM/AB.*

Ответ. $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$. Решение. Положим $\angle ABM = \alpha$. Тогда $\angle BMC = 2\alpha$, $\angle BMA = 180°–2\alpha$, $\angle BAM = 180°–\angle ABM–\angle AMB = \alpha = \angle ABM$, откуда $BM = AM = MC$. Получается, что медиана BM треугольника ABC равна половине стороны AC, откуда $\angle ABC = 90°$.

Положим $BC = 4m$. Тогда $AC = 6m$, $AM = 3m$, $AB = \sqrt{36m^2-16m^2} = 2m\sqrt{5}$, и, деля AM на AB, получаем ответ.

4. *Из клетчатого квадрата со стороной 2015 вырезали по клеточкам несколько квадратов со стороной 10. Докажите, что из оставшейся части большого квадрата можно вырезать:*

а) *прямоугольник со сторонами 1 и 10;* **б)** *пять прямоугольников со сторонами 1 и 10.*

Решение. Докажем сразу более сильное утверждение б). Рассмотрим прямоугольник 1×10, примыкающий своей короткой стороной к левой стороне квадрата 2015×2015. Если какая-то из его клеток попала в вырезанный квадрат 10×10, то туда же попала и самая правая его клетка. Значит, если самая правая клетка такого прямоугольника не вырезана, то не вырезана ни одна из его клеток. Осталось заметить, что число 2015 при делении на 10 дает остаток 5, и потому в десятом слева столбце квадрата 2015×2015 найдутся хотя бы пять не вырезанных клеток.

5. *Известно, что и сумма и произведение двух натуральных чисел a и b — квадраты натуральных чисел. Докажите, что число $|16a–9b|$ — не простое.*

Решение. Если $16a–9b = 0$, утверждение задачи очевидно. Далее считаем, что $16a–9b \neq 0$.

Положим d = НОД(a, b), и пусть $a = dm$, $b = dn$. Тогда $ab = d^2mn = c^2$. Поскольку числа m и n взаимно просты, в их разложения на простые множители все простые числа входят в чётных степенях. Поэтому m и n — квадраты натуральных чисел: $m = u^2$, $n = v^2$.

Пусть $d > 1$. Тогда $|16a–9b| = d|((4u)^2–(3v^2))| = d(4u+3v)|(4u–3v)|$. Это составное число, поскольку $d > 1$ и $4u+3v > 1$.

Пусть $d = 1$. Тогда $|16a–9b| = (4u+3v)|(4u–3v)|$. Если $|4u–3v| \neq 1$, всё доказано. Иначе $4u–3v = \pm1$, то есть $4u = 3v\pm1$. По условию $16(a+b) = 16f^2 = 16u^2+16v^2 = (3v\pm1)^2+16v^2 = 25v^2\pm6v+1$. Но от числа $25v^2 = (5v)^2$ до ближайших соседних квадратов $(5v\pm1)^2$ расстояние минимум $(5v)^2–(5v–1)^2 = 10v–1$, что больше, чем $6v+1$. Поэтому получается, что число $(4f)^2 = 16f^2$ не является квадратом натурального числа - противоречие. Итак, случай $4u–3v = \pm1$ невозможен, что и завершает доказательство.

Первый тур дистанционного этапа IX олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Какое наименьшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 20162016 так, чтобы результат делился на 2016 (ничего не вычёркивать нельзя)? Напоминаем, что надо не только привести пример, но и объяснить, почему меньшим количеством цифр обойтись нельзя.*

Ответ. Три. Решение. Так как 2016 делится на 9, сумма цифр получившегося после вычеркивания цифр числа также должна делиться на 9. У числа 20162016 сумма цифр равна 18. Вычёркивание одного или двух нулей нужного результата не даёт: числа 2162016, 2016216 и 216216 на 2016 не делятся. Значит, надо вычеркивать цифры, дающие в сумме 9. Так как сумма любых двух цифр числа 20162016 меньше 9, придётся вычеркнуть хотя бы три цифры. Три цифры вычеркнуть можно: 2016~~2~~0~~16~~ = 20160.

2. *Два велосипедиста ехали по шоссе, каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что более быстрый из них проезжает 6 км на 5 минут быстрее, а за 20 минут проезжает на 4 км больше, чем медленный. Найдите произведение скоростей велосипедистов, выраженных в километрах в час.*

Ответ. 864. Решение. Пусть скорость медленного велосипедиста равна u км/ч, а быстрого v км/ч. Тогда из условия имеем $\frac{6}{u}=\frac{6}{v}+\frac{1}{12}$ и $\frac{v}{3}=\frac{u}{3}+4$. Из первого уравнения имеем $uv = 72(v-u)$, из второго $v-u = 12$, откуда и получаем ответ.

3. *В футбольном турнире, где каждая команда встречалась с каждой один раз, играли 16 команд. За победу давали три очка, за ничью - одно, за поражение - ноль. После окончания турнира выяснилось, что каждая команда выиграла хотя бы треть своих матчей и проиграла хотя бы треть своих матчей. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.*

Первое решение. Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. При этом 29 очков ни одна команда набрать не могла. В самом деле, пусть такая команда есть. Тогда она должна была хотя бы раз сыграть вничью. Но в этом случае у неё максимум 9 побед, и она набрала не более $3\cdot 9+1 = 28$ очков, ибо любая замена победы ничьей уменьшает число очков. Таким образом, у нас 16 команд и 15 возможных сумм баллов: 15, …, 27, 28, 30, из чего и вытекает утверждение задачи.

Второе решение. Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. Тут 16 вариантов, и если никакие две команды не набрали поровну очков, то каждое количество очков от 15 до 30 набрала ровно одна команда, а всего они набрали 15+…+30 = 360 очков. Но 360 — это максимальное возможное общее число очков, которое получается, если все $16\cdot 15/2 = 120$ матчей турнира закончились чьей-либо победой. Однако, не все числа от 15 до 30 делятся на 3, поэтому в турнире были и ничьи, а тогда общая сумма очков должна быть меньше 360 — противоречие.

4. *Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Точка P такова, что DOCP — тоже параллелограмм (CD — его диагональ). Обозначим через Q точку пересечения BP и AC, а через R —точку пересечения DQ и CP. Докажите, что PC = CR.*

Решение. Заметим, что отрезки *DP* и *BC* параллельны и равны. Поэтому *BOPC* - параллелограмм, откуда $QC = OC/2 = PD/2$. Таким образом, отрезок *QC* с концами на сторонах *RD* и *RP* треугольника *DRP* параллелен стороне *DP* этого треугольника и равен её половине. Значит, он является средней линией этого треугольника (иначе он вместе со средней линией образовывал бы параллелограмм, что невозможно, так как прямые *RD* и *RP* не параллельны). Следовательно, *C* - середина отрезка *RP*, что и требовалось доказать.

5. *Существуют ли такие натуральные числа m, n, k, что все три числа m^2+n+k, n^2+k+m, k^2+m+n являются квадратами натуральных чисел?*

Ответ. Нет. Решение. Допустим, утверждение задачи верно. Тогда $m^2+n+k \geq (m+1)^2$, откуда $n+k \geq 2m+1$. Аналогично, $m+k \geq 2n+1$, $n+m \geq 2k+1$. Складывая три полученных неравенства, получаем $2(n+m+k) \geq 2(n+m+k)+3$. Противоречие.

Первый тур дистанционного этапа X олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *На доске выписаны в ряд все натуральные числа от 1 до 2018: 1, 2, 3, ..., 2018. Найдите среди них какие-нибудь два, после стирания которых сумма всех чисел, стоящих между стёртыми, оказалась вдвое меньше суммы всех остальных не стёртых чисел?*

Ответ. Например, 673 и 1346. Решение. Заметим, что суммы чисел, равноотстоящих от концов ряда, равны: $1+2018 = 2+2017 = \ldots = 1009+1010$. Если стереть одну такую пару чисел, пар останется $1008 = 336\cdot 3$. Значит, если между стёртыми числами будет 336 пар, то снаружи останется $336\cdot 2 = 672$ пары, и условие задачи будет выполнено. Именно так и получится, если стереть числа 673 и 1346. Замечание. Приведённый в ответе пример – не единственный: ещё подходят, например, числа 1289 и 1738.

2. *В треугольнике ABC провели биссектрису BD, а в треугольниках ABD и CBD — биссектрисы DE и DF соответственно. Оказалось, что EF || AC. Найдите угол DEF.*

Ответ. 45 градусов. Решение. Пусть отрезки BD и EF пересекаются в точке G. Из условия имеем $\angle EDG = \angle EDA = \angle DEG$, откуда $GE = GD$. Аналогично, $GF = GD$. Значит, $GE = GF$, то есть BG — биссектриса и медиана, а значит, и высота в треугольнике BEF. Отсюда DG — медиана и высота, а значит, и биссектриса в треугольнике EDF, откуда $\angle DEG = \angle EDG = \angle FDG = \angle GFD$. Поскольку сумма четырёх входящих в последнее равенство углов равна 180 градусам, каждый из них равен 45 градусам.

3. *Для каждой пары* ***различных*** *натуральных чисел a и b, не больших 20, Петя нарисовал на доске прямую $y = ax+b$ (то есть он нарисовал прямые $y = x+2$, ..., $y = x+20$, $y = 2x+1$, $y = 2x+3$,..., $y = 2x+20$, ..., $y = 3x+1$, $y = 3x+2$, $y = 3x+4$, ..., $y = 3x+20$, ..., $y = 20x+1$, ..., $y = 20x+19$). Вася нарисовал на той же доске окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Сколько Петиных прямых пересекает Васину окружность?*

Ответ. 190. Первое решение. График $y = ax+b$ пересекает оси координат в точках $A(-b/a, 0)$ и $B(0, b)$. Если $b < a$, точка A находится внутри Васиной окружности, и потому график $y = ax+b$ пересекает её. Нетрудно подсчитать, что Петиных прямых, у которых $b < a$, имеется $19+18+\ldots+2+1 = 190$.

Рассмотрим теперь случай, когда $b > a$. Тогда точки $K(-1, 0)$ и $N(0, 1)$ находятся на катетах треугольника OAB, где O — начало координат, а точка $M(-1, 1)$ находится внутри этого треугольника, так как $a\cdot(-1)+b = b-a \geq 1$. Таким образом, угол KMN целиком лежит ниже прямой $y = ax+b$, и Васина окружность не пересекается с этой прямой, так как целиком содержится в угле KMN.

Итак, Петина прямая пересекается с Васиной окружностью тогда и только тогда, когда $b < a$, откуда и получается ответ.

Второе решение. Уравнение Васиной окружности — $x^2+y^2 = 1$. Петина прямая пересекает эту окружность тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $x^2+(ax+b)^2 = 1$ имеет два решения. После раскрытия скобок и приведения подобных членов это уравнение принимает вид $(a^2+1)x^2+2abx+b^2-1 = 0$. Дискриминант здесь равен $4(a^2+1-b^2)$, и он положителен тогда и только тогда, когда $a^2+1 \geq b^2 \Leftrightarrow a > b$. Далее рассуждаем как в начале первого решения.

4. *Квадрат со стороной 100 разрезали на квадраты (не обязательно одинаковые) со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата и меньшими 10. Докажите, что сумма периметров получившихся квадратов не меньше 4400.*

Решение. Проведём 11 параллельных отрезков, два из которых являются сторонами квадрата 100×100, а остальные девять делят этот квадрат на прямоугольники 10×100. Тогда каждый квадрат нашего разрезания пересекается ровно с одним из этих отрезков по отрезку, равному своей стороне. Значит, сумма сторон квадратов разрезания не меньше, чем $11\cdot 100 = 1100$, а сумма периметров — не меньше, чем $1100\cdot 4 = 4400$.

5. *На каждой из пяти карточек написано какое-то число. Карточки лежат на столе числами вниз. Мы можем, заплатив рубль, указать на любые три карточки, и нам сообщат сумму написанных на них чисел. За какую наименьшую цену можно наверняка узнать сумму всех пяти чисел?*

Ответ. За 4 рубля. Решение. Пусть написаны числа a, b, c, d, e. Спросим про суммы $a+b+c$, $a+b+d$, $a+b+e$, $c+d+e$. Тогда, складывая три первые суммы и вычитая из результата четвёртую, получаем $3(a+b)$, затем $a+b$ и, прибавляя к результату $c+d+e$, сумму всех пяти чисел.

Допустим, нам удалось обойтись тремя вопросами. Назовём *вхождением* присутствие карточки в вопросе. Если есть карточка с тремя вхождениями, то увеличим число на ней на 2, а все остальные числа уменьшим на 1. Тогда ответы на все три вопроса не изменятся, а сумма всех чисел уменьшится на 2. Значит, её такими тремя вопросами узнать нельзя. Получается, что у каждой карточки не больше двух вхождений, а это возможно только если у четырёх карточек по два вхождения, а у одной — одно. Поменяв, если надо, обозначения, мы можем считать, что одно вхождение у карточки e, а один из вопросов — $a+b+c$. Тогда в ещё одном вопросе без карточки e должны присутствовать две из трёх карточек a, b, c. Поменяв, если надо, обозначения, можно считать, что это вопрос $a+b+d$. Тогда в третьем вопросе не может быть ни одной из карточек a и b, то есть это вопрос $c+d+e$. Но тогда при увеличении каждого из чисел a и e на 2 с одновременным уменьшением каждого из чисел b, c и d на 1 ответы на все три вопроса не изменятся, а сумма всех чисел увеличится на 1. Значит, и в этом случае сумму всех пяти чисел узнать нельзя.

Второй тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Алиса и Белый Кролик в полдень вместе вышли из домика Кролика и пошли на прием к Герцогине. Пройдя полпути, Кролик вспомнил, что забыл перчатки и веер, и побежал за ними домой со скоростью в два раза большей, чем он шел вместе с Алисой. Схватив перчатки и веер, он побежал к Герцогине (с той же скоростью, что бежал домой). В результате Алиса (которая всё время шла с одной и той же скоростью) пришла к Герцогине вовремя, а Кролик опоздал на 10 минут. На какое время был назначен прием у Герцогини?*

Ответ. На 12.40. Решение. Бегая за забытыми вещами, Кролик пробежал расстояние, равное пути от его домика до места приёма. Алиса, идя вдвое медленнее, чем бежал Кролик, за это время прошла половину этого пути. Стало быть, когда Кролик добежал до середины пути, Алиса как раз дошла до места приёма. 10 минут, на которые опоздал Кролик, понадобились ему на вторую половину пути. Алиса прошла её вдвое медленнее, то есть за 20 минут, а весь путь — за 40 минут. Отсюда и получаем ответ.

2. *Внутри угла AOB, равного 120°, проведены лучи OC и OD так, что каждый из них является биссектрисой какого-то из углов, получившихся на чертеже. Найдите величину угла AOC. Укажите все возможные варианты.*

Ответ. 30°, 40°, 60°, 80° или 90°.

Решение. Если луч *OC* — биссектриса угла *AOB* (рис. 1), то угол *AOC* равен 60° (независимо от того, является ли луч *OD* биссектрисой угла *AOC* или *BOC*).

Если луч *OD* — биссектриса угла *AOB* (рис. 2), то угол *AOC* равен 30° (если *OC* — биссектриса угла *AOD*) или 90° (если *OC* — биссектриса угла *BOD*)

Если луч *OC* — биссектриса угла *AOD*, а луч *OD* — биссектриса угла *BOC* (рис. 3), то угол *AOC* равен 60°.

Аналогично, если луч *OD* — биссектриса угла *AOC*, а луч *OC* — биссектриса угла *BOD* (рис. 4), то угол *AOC* равен 80°.

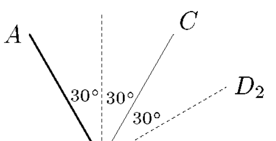


Рис. 1

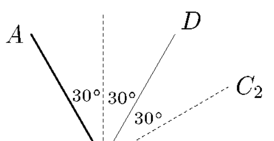


Рис. 2

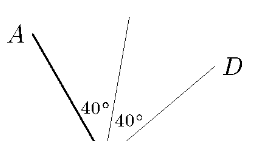


Рис. 3

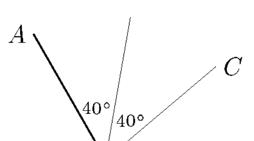


Рис. 4

3. *Найдите все натуральные числа, десятичная запись которых оканчивается на два нуля, имеющие ровно 12 натуральных делителей.*

Ответ. 200 и 500. Решение. Так как запись числа оканчивается на два нуля, оно делится на 100, то есть имеет вид $n\cdot 100 = n\cdot 2^2\cdot 5^2$. Докажем, что если у числа ровно 12 делителей, то n может быть равно только 2 или 5. Наименьшее из чисел вида $n\cdot 2^2\cdot 5^2$ — число 100 (случай $n = 1$) имеет 9 делителей. Их можно найти непосредственно, но можно и так: все делители числа 100 имеют вид $2^k\cdot 5^m$, где k и m могут быть равны 0, 1 или 2. Следовательно, число делителей равно $3\cdot 3 = 9$. Если n не делится ни на 2 ни на 5, то у числа $n\cdot 100$ будет не менее 18 делителей: 9 делителей числа 100 и 9 делителей, получающихся из делителей числа

100 умножением на n. Если $n = 2$ или $n = 5$, то делителей, как легко проверить, будет ровно 12. Если же n делится на 2 или 5 в степени выше первой, то n делится на 200 или 500, и при этом больше 200 или 500 соответственно, поэтому делителей у него больше 12. Отсюда — ответ.

4. *В треугольнике ABC отметили произвольную точку D на медиане BM. Затем через D провели прямую, параллельную AB, а через C — прямую, параллельную BM. Эти прямые пересеклись в точке E. Докажите, что $BE = AD$.*

Решение. Проведём через точку A прямую, параллельную BM, и пусть F — точка её пересечения с прямой DE. По теореме Фалеса из равенства $AM = MC$ следует равенство $FD = DE$. Кроме того, по построению $ABDF$ — параллелограмм, откуда $AB = FD$. Отсюда $AB = DE$, и $ABED$ — параллелограмм, откуда и следует, что $BE = AD$.

5. *На бесконечной шашечной доске на двух соседних по диагонали клетках стоят две черные шашки. Можно ли добавить на доску несколько черных шашек и одну белую шашку так, чтобы белая шашка могла одним ходом съесть все черные шашки (включая и две стоявшие изначально)?*

Напомним, что шашка ест соседнюю по диагонали шашку, перепрыгивая через неё на следующее за ней по диагонали поле (которое должно быть свободно); одним ходом шашка может съесть несколько шашек подряд, причём съеденные шашки не снимаются с доски, пока ход не завершён.

Ответ. Нет. Решение. Перекрасим черные клетки доски в красный и синий цвета через одну (так, чтобы синие клетки граничили по диагонали только с красными, а красные — только с синими). Белая шашка, стоящая на синей клетке, может есть лишь те черные шашки, которые стоят на красных клетках. И наоборот, белая шашка, стоящая на красной клетке, может есть лишь те черные шашки, которые стоят на синих клетках. Однако, из двух изначально поставленных шашек одна стоит на синей клетке, а другая — на красной. Следовательно, одну из этих двух шашек белая съесть не сможет.

Второй тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *На уроке физкультуры все ученики 8а класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 52% учеников 8а класса — мальчики. Найдите количество девочек в 8а классе. Не забудьте обосновать ответ.*

<u>Ответ</u>: 12. <u>Решение</u>. Если бы в шеренге было четное число учеников, мальчиков и девочек в ней было бы поровну. Но по условию мальчиков в классе больше. Значит, в шеренге нечетное число учеников, причем мальчики стоят на нечетных местах. Пусть в классе n девочек. Тогда мальчиков там $n+1$, и из условия получаем, что $n+1 = 0{,}52(2n+1)$, откуда $n = 12$.

2. *На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?*

<u>Ответ</u>: 638. <u>Решение</u>. Поровну рыцарей и лжецов ни в одной деревне быть не может, потому что тогда все ее жители солгали бы. Если в деревне больше рыцарей, то, очевидно, правду сказали 66 человек и 33 человека солгали, а если больше лжецов — то наоборот. Пусть на острове n деревень, где больше рыцарей. Тогда из условия следует, что $66n+33(1000-n) = 54054$. Решая это уравнение, получаем ответ.

3. *В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на ее продолжении за точку L выбрана точка K, для которой LK = AB. Оказалось, что AK || BC. Докажите, что AB > BC.*

<u>Решение</u>. Пусть угол ABC равен $2x$. Тогда каждый из углов ABL, CBL и AKB равен x (последний — как внутренний накрест лежащий с CBL при пересечении параллельных прямых AK и BC с BK). Следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, откуда $AK = AB$. Так как по условию $LK = AB$, треугольник AKL —равнобедренный, откуда получаем, что углы KAL, KLA и BLC равны $90°-x/2$. Осталось заметить, что угол BAC равен (из треугольника BAK) $180°-2x-(90°-x/2)$, а угол BCA равен (из треугольника BCL) $180°-x-(90°-x/2)$. Таким образом, угол BCA больше угла BAC, откуда $AB > BC$.

4. *Квадрат 15x15 разбит на квадратики 1x1. Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общего конца. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)*

<u>Ответ</u>: 128. <u>Решение</u>. Занумеруем по порядку строки и столбцы квадрата числами от 1 до 15 и проведем по две диагонали в клетках, стоящих на пересечении нечетных строк с нечетными столбцами. Таких клеток 64, то есть диагоналей будет проведено 128. С другой стороны, у диагоналей не должно быть общих концов, а вершин клеток в квадрате 15x15 у нас всего 16x16 = 256. Поэтому диагоналей можно провести не больше, чем 256:2 = 128.

5. *В строку выписаны 2011 последовательных пятизначных чисел. Оказалось, что сумма цифр 21-го числа равна 37, а сумма цифр 54-го равна 7. Найдите сумму цифр 2011-го числа. (Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других ответов нет).*

<u>Ответ</u>: 29. <u>Решение</u>. При переходе от 21-го числа к 54-му сумма цифр уменьшается на 30. Легко проверить, что такое возможно, только если по дороге происходит переход через число, кратное 10000. Но это значит, что в разрядах тысяч и сотен у 21-го числа стоят девятки, а в разряде десятков — не меньше шестерки. Поэтому е 11-го из выписанных чисел цифра десятков на единицу меньше, чем у 21-го, а остальные цифры — такие же, и сумма цифр 11-го числа равна 36. 2011-е число ровно на 2000 больше 11-го, причем между ними есть число, кратное 10000. Поэтому 11-е и 2011-е число совпадают в последних трех разрядах, а сумма цифр в разрядах тысяч и десятков тысяч у 2011-го числа на 7 меньше (при переходе через число, кратное 10000, она упала на 8, а при переходе через следующее число, кратное 1000, выросла на 1), откуда и получаем ответ.

Второй тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100, если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут.*

Ответ: 2012. Решение. Все числа, две последние цифры которых — 86 или меньше, за 87 минут успеют превратиться в числа, оканчивающиеся на 00, и следующим шагом уменьшится в 100 раз. В итоге все такие числа через 87 минут окажутся не больше, чем 2100/100 = 21. Те же числа, которые оканчиваются на 87 и более, за 87 минут уменьшатся на 87. Наибольшее из таких чисел — 2099, и оно через 87 минут превратится в 2012.

2. *Навигатор на «Лексусе» бизнесмена Бориса Михайловича сообщает, сколько осталось ехать до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Борис Михайлович выехал из дома на дачу. В середине пути навигатор сообщил, что осталось ехать 1 час. В этот момент прямо перед «Лексусом» на дорогу выехал тракторист Вася, обогнать которого не было никакой возможности. После того, как Борис Михайлович проехал половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось ехать 2 часа. Через сколько часов после этого приедет на дачу бизнесмен, если так и не обгонит тракториста? (Скорость трактора постоянна.)*

Ответ: Через 5 часов. Первое решение. Примем расстояние от дома БМ до дачи за 4 единицы длины. Тогда средняя скорость «Лексуса» на первой половине пути по условию равнялась 2 ед./час. Пусть v ед./час — скорость трактора. Тогда на третью четверть пути «Лексус» потратил $1/v$ часов, и его средняя скорость на первых трёх четвертях пути составила $3/(1+1/v)$ ед./час. С другой стороны, по условию с такой скоростью «Лексус» проедет оставшуюся четверть пути за 2 часа, откуда $2(3/(1+1/v)) = 1$. Решая это уравнение, находим $v = 1/5$, откуда и получаем ответ. Второе решение. Когда навигатор сообщил Борису Михайловичу, что ему осталось ехать 2 часа, ехать ему оставалось четверть пути. Значит, уже пройденные ¾ пути он проехал за 6 часов. Но первую половину пути БМ проехал за час, значит, 5 часов он ехал за Васей третью четверть пути. Столько же времени уйдет у него и на оставшуюся четверть.

3. *Точка E — середина основания AD трапеции $ABCD$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Известно, что $AF \perp BD$. Докажите, что $BC = FC$.*

Решение. FE — медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника AFD. Поэтому $FE = AD/2 = ED$ и $\angle EDF = \angle DFE$. Но углы EDF и CBF равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC, а углы DFE и BFC равны как вертикальные. Поэтому $\angle CBF = \angle BFC$, откуда $BC = FC$.

4. *Квадрат 20×20 разбит на единичные квадратики. Несколько сторон единичных квадратиков стёрты, причем стёртые отрезки не имеют общих концов, а на верхней и правой сторонах квадрата стёртых отрезков нет. Докажите, что из левого нижнего угла квадрата можно добраться в правый верхний по нестёртым отрезкам.*

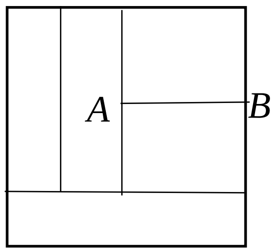
Решение. Из каждой вершины квадратика, кроме правой верхней вершины квадрата 20×20, можно сделать ход либо вправо, либо вверх — иначе два стертых отрезка имели бы общий конец. Поэтому, начав с левого нижнего угла квадрата 20×20 и сделав 40 таких ходов, мы попадем в его правый верхний угол.

5. *Вася вычислил суммы цифр у 200 последовательных натуральных чисел и выписал эти суммы в строку в некотором порядке. Петя выписал под ними суммы цифр еще каких-то 200 последовательных натуральных чисел (также в произвольном порядке). После чего Таня умножила каждое из Васиных чисел на число, написанное под ним, и получила в результате 200 последовательных натуральных чисел. Докажите, что кто-то из них ошибся.*

Решение. Число делится на 3 или на 9 тогда и только тогда, когда на 3 или на 9 соответственно делится сумма его цифр. Среди 200 последовательных чисел на 3 делится 66 или 67. Стало быть, среди сумм их цифр — тоже. Пусть среди Васиных чисел, делящихся на 3, ровно под k подписаны Петины числа, делящиеся на 3. Тогда произведений, делящихся на 3, будет не меньше, чем $k+2(66-k) = 132-k$. Если у Тани получилось 200 последовательных натуральных чисел, число $132-k$ должно быть не больше 67, откуда $k \geq 65$. Но тогда среди Таниных чисел будет хотя бы 65 таких, которые делятся на 9, а чисел, делящихся на 9, среди двухсот последовательных натуральных чисел не больше 23-х. Противоречие.

Второй тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Квадрат разрезан на прямоугольники равной площади так, как показано на рисунке. Найдите площадь квадрата, если отрезок AB равен 1.*



<u>Ответ</u>: 4. <u>Решение</u>. Очевидно, точка A является серединой вертикального отрезка, на котором лежит. Поэтому у двух прямоугольников, лежащих левее точки A, вертикальные стороны вдвое длиннее, чем у прямоугольников со стороной AB, и потому их горизонтальные стороны вдвое короче отрезка AB. Следовательно, сторона квадрата равняется $2AB = 2$, откуда и получаем ответ.

2. *Среднее арифметическое нескольких подряд идущих натуральных чисел больше, чем самое маленькое из них, в 5 раз. Во сколько раз среднее арифметическое меньше, чем наибольшее из этих чисел?*

<u>Ответ</u>: В 9/5 = 1,8 раза. <u>Решение</u>. Пусть всего у нас d чисел, и n — наименьшее из них. Тогда их среднее арифметическое равно

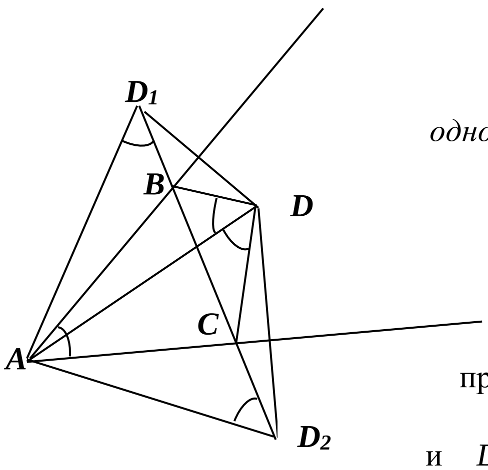
$$(n+(n+1)+\ldots+(n+d-1))/d = (nd+(1+2+\ldots+d-1))/d = n+d(d-1)/2d = n+(d-1)/2.$$

С другой стороны, оно равно $5n$, откуда $d-1 = 8n$. Значит, наибольшее из чисел равно $n+8n = 9n$, что больше среднего арифметического в $9n/5n = 9/5$ раза.

3. *В коробке лежат шарики 10 цветов. Известно, что можно вынуть из коробки 100 шариков так, чтобы в ней шариков всех 10 цветов осталось поровну. Докажите, что в коробку можно добавить 900 шариков так, чтобы в ней шариков всех цветов стало поровну.*

<u>Решение</u>. Пусть для того, чтобы шариков всех 10 цветов стало по k штук, надо удалить 100 шариков, среди которых a_1 шариков первого цвета, a_2 — второго цвета, …, a_{10} — десятого цвета. Тогда если в корзину добавить $100-a_1$ шариков первого цвета, $100-a_2$ — второго цвета, …, $100-a_{10}$ — десятого цвета, шариков всех цветов станет по $k+100$, а всего добавлено будет $1000-(a_1+\ldots+a_{10}) = 1000-100 = 900$ шариков.

4. *Внутри угла BAC, равного 45°, взята точка D так, что каждый из углов ADB и ADC равен 45°. Точки D_1 и D_2 симметричны точке D относительно прямых AB и AC соответственно. Докажите, что точки D_1, D_2, B и C лежат на одной прямой.*



<u>Решение</u>. Так как треугольники ABD и ABD_1 по условию симметричны, $AD_1 = AD$, $\angle BAD_1 = \angle BAD$, $\angle AD_1B = \angle ADB = 45°$. Аналогично, $AD_2 = AD$, $\angle CAD_2 = \angle CAD$, $\angle AD_2C = \angle ADC = 45°$. Из равенств $\angle BAD_1 = \angle BAD$, и $\angle CAD_2 = \angle CAD$ следует, что $\angle D_1AD_2 = 2\angle BAC = 90°$. Так как при этом $AD_1 = AD = AD_2$, имеем $\angle AD_1D_2 = \angle AD_2D_1 = 45°$. Таким образом, $\angle AD_1D_2 = \angle AD_1B$ и $\angle AD_2D_1 = \angle AD_2C$, причем точки B и D_2 лежат с одной стороны от прямой AD_1, а точки C и D_1 — с одной стороны от прямой AD_2, откуда и следует утверждение задачи.

5. *В стране Думуляндии из каждого города выходило ровно 10 дорог, каждая дорога соединяла ровно два города. При этом сеть дорог была связной, то есть из любого города можно было добраться по дорогам до любого другого, возможно, через другие города. Но во время наводнения затопило два города, соединенные дорогой, после чего эта связность нарушилась (так как через затопленные города ездить нельзя). Докажите, что до наводнения можно было закрыть 9 дорог так, чтобы связность сети дорог также нарушилось.*

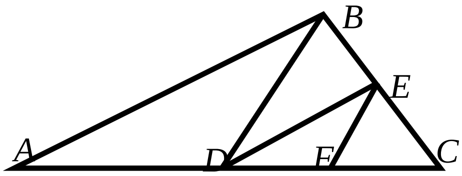
<u>Решение</u>. В сумме из затопленных городов выходило 18 дорог в другие города (назовем эти дороги затопленными). После наводнения все города распались минимум на две части, и проехать из одной части в другие можно только через затопленные города. Хотя бы в одну из этих частей ведет не более 9 затопленных дорог. Если бы эти дороги закрыли до наводнения, то из этой части также нельзя бы было проехать в остальные города.

Второй тур дистанционного этапа VII олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Одно из чисел a, b, c положительно, одно — отрицательно, одно — равно 0. Определите, какое из чисел положительно, какое — отрицательно, и какое равно 0, если известно, что $ab^2(a+c)(b+c) < 0$.*

<u>Ответ</u>. $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$. <u>Решение</u>. Если бы нулю равнялось a или b, то произведение из условия тоже равнялось бы нулю. Значит, нулю равно c. Таким образом, произведение из условия равно a^2b^3. Поскольку $a^2 > 0$, то $b^3 < 0$. Следовательно, $b < 0$, откуда $a > 0$.

2. *В треугольнике ABC провели биссектрису BD, в треугольнике BDC — биссектрису DE, а в треугольнике DEC — биссектрису EF. Оказалось, что прямые BD и EF параллельны. Докажите, что угол ABC вдвое больше угла BAC.*



<u>Решение</u>. Из условия следует, что $\angle ABD = \angle EBD = \angle CEF = \angle DEF = \angle BDE$. Таким образом, внутренние накрест лежащие углы ABD и BDE при пересечении прямой BD прямыми AB и DE равны. Следовательно, $AB \parallel DE$, откуда $\angle BAC = \angle EDF = \angle EDB = \angle ABD = \angle ABC/2$, что и требовалось доказать.

3. *Вася написал на 99 карточках по одному числу (среди этих чисел могли быть и равные) и положил карточки по кругу числами вниз. Для каждой пары соседних карточек он сообщил Пете, какие числа написаны на этих карточках, но не сообщил, какое число на какой карточке. Мог ли Вася подобрать числа так, чтобы Петя не смог по этим данным наверняка выяснить про каждую карточку, какое число на ней написано?*

<u>Ответ</u>. Не мог. <u>Решение</u>. Заметим, что Пете достаточно определить число на какой-то одной карточке: рассматривая пары из неё и соседних карточек, мы узнаем числа на соседних карточках, и, продвигаясь таким же образом далее, узнаем числа на всех карточках. Покажем, что Петя сможет это сделать.

Рассмотрим три подряд идущие карточки. Пусть про первые две известно, что на них написаны числа a и b, а про две последние — что на них написаны числа a и c. Если числа b и c различны или $a = b$, то понятно, что на средней карточке написано число a, и задача решена. Получается, что Петя не может определить числа на карточках только тогда, когда на каждой паре соседних карточек написаны одни и те же числа a и b. Но этот случай невозможен, потому что тогда числа a и b чередуются по кругу, и количество карточек должно быть чётным, а число 99 нечётно.

4. *Перед тем, как приступить к решению задачи, Коля посмотрел на часы. Был второй час дня. Потратив на решение ровно час, Коля снова посмотрел на часы и заметил, что угол между часовой и минутной стрелками остался прежним. Когда Коля начал решать задачу?*

<u>Ответ</u>. В 1 час $8^2/_{11}$ мин или в 1 час $40^{10}/_{11}$ мин. <u>Решение</u>. Пусть в момент, когда Петя посмотрел на часы, было x минут второго. Так как за минуту минутная стрелка проходит 6°, а часовая — 0,5°, то часовая стрелка в этот момент образовывала с направлением на 12 часов угол в $30°+0{,}5x°$, а минутная — угол в $6x°$. За час минутная стрелка совершила полный оборот и оказалась на прежнем месте, а часовая повернулась на 30°. Очевидно, минутная стрелка будет направлена вдоль прямой, делящей пополам угол между двумя положениями часовой стрелки. Значит, $6x° = ((30°+0{,}5x°)+(60°+0{,}5x°))/2$, если минутная стрелка лежит внутри угла, образованного двумя положениями часовой, либо $6x°-180° = ((30°+0{,}5x°)+(60°+0{,}5x°))/2$, если нет. Решая эти уравнения, получаем два указанных выше ответа.

5. *Какое наименьшее количество различных чисел можно выбрать таким образом, чтобы каждое выбранное число равнялось сумме каких-то трёх других различных выбранных чисел?*

<u>Ответ</u>. Семь. <u>Решение</u>. *Пример*. –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. *Оценка*. Пусть n — наибольшее из выбранных чисел. Если $n \le 0$, все остальные выбранные числа отрицательны, и сумма любых двух из них меньше каждого из слагаемых, а, значит, не может равняться n. Следовательно, $n > 0$. Те два из выбранных чисел, сумма которых равна n, тоже должны быть положительными, иначе их сумма будет меньше n. Итак, среди выбранных чисел должно быть по крайней мере три положительных. Рассматривая наименьшее из выбранных чисел, аналогичным образом убеждаемся, что среди выбранных чисел должно быть по крайней мере три отрицательных. Следовательно, всего должно быть выбрано не менее шести чисел.

Допустим, выбрано ровно шесть чисел: $a < b < c < d < e < f$. Из доказанного выше следует, что $c < 0 < d$. Поменяв, если нужно, знаки всех чисел на противоположные, можно считать, что $d \le |c|$. Но тогда число f нельзя представить в виде суммы трёх других выбранных, так как даже $c+d+e \le e < f$.

Второй тур дистанционного этапа VIII олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Фома и Ерёма шли с постоянными скоростями в одном направлении по дороге, вдоль которой стоят километровые столбы. За час Фома прошёл мимо пяти столбов, а Ерёма — мимо шести. Могла ли скорость Фомы быть больше скорости Ерёмы?*

Ответ. Могла. Решение. Пусть Ерёма в начале часа был в 50 м от первого из пройденных им столбов, а в конце часа — в 50 м за шестым столбом. Тогда он прошёл за час 5100 м. Пусть Фома в начале часа был в 600 м от первого из пройденных им столбов, а в конце часа — в 600 м за пятым из пройденных им столбов. Тогда он прошёл 600+4000+600 = 5200 м — больше, чем Ерёма.

2. *В комнате собрались три человека. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, либо хитрец, который может и говорить правду и лгать по своему желанию. Один из собравшихся сказал: «Среди нас есть лжец». Другой сказал: «Среди любых двух из нас есть лжец». Третий сказал: «Все мы — лжецы». Докажите, что среди собравшихся есть хитрец.*

Решение. Допустим, среди собравшихся нет хитреца. Тогда каждый из них — рыцарь или лжец. Третий не мог сказать правду: иначе получилось бы, что правду сказал лжец. Значит, он лжец. Тогда первый сказал правду, и он — рыцарь. Остался второй. Допустим, он солгал. Тогда он лжец, и всего среди собравшихся два лжеца: второй и третий. Но тогда среди любых двух собравшихся в самом деле есть лжец, и получается, что лжец сказал правду — противоречие. Допустим, второй сказал правду. Тогда среди собравшихся два рыцаря: первый и второй. Но в таком случае среди двоих — первого и второго — нет лжеца, и получается, что второй солгал. Снова противоречие.

3. *Могут ли медиана и биссектриса, проведенные из вершины A остроугольного треугольника ABC, делить высоту BH этого треугольника на три равные части?*

Ответ. Не могут. Решение. Допустим, могут. Отметим на высоте BH такие точки F и G, что $BF = FG = GH = BH/3$. Пусть биссектриса угла A пересекает BH в точке K. Из треугольника ABH по свойству биссектрисы имеем $BK/KH = AB/AH > 1$, откуда $K = G$. Значит, медиана AM треугольника ABC проходит через точку F, и потому середина M стороны BC лежит на отрезке BL, где $FL \parallel AC$. Но это невозможно, так как по теореме Фалеса $BL/BC = BF/BH = 1/3$.

4. *Вася задумал шесть натуральных чисел: a, b, c, d, e, f. За рубль можно указать любые два из них и узнать их произведение. Пете известно, что любые два из задуманных чисел взаимно просты (то есть не имеют общих делителей, больших 1). За какую наименьшую сумму он сможет узнать все задуманные числа?*

Ответ. За 4 рубля. Решение. Покажем, *как обойтись четырьмя рублями*. Сначала узнаем произведения ab и bc. Так как у чисел a и c нет общих простых делителей, наибольший общий делитель этих произведений равен b. Таким образом мы узнаём число b, а с ним и числа $a = ab/b$ и $c = bc/b$. Аналогично за два вопроса узнаем числа d, e и f.

Покажем, что *трёх рублей не хватит*. Пусть мы знаем только три произведения. Тогда в них должны входить все шесть чисел, иначе про одно из них мы не будем знать вообще ничего. Но в таком случае каждое число входит ровно в одно произведение, и если, например, одно из произведений равно 6, мы не сможем отличить набор из двойки и тройки от набора из единицы и шестёрки.

5. *Игорь хочет вырезать из клетчатого квадрата размером 11×11 17 клетчатых прямоугольников размером 1×6. Можно ли отметить в квадрате одну клеточку так, чтобы она наверняка осталась не вырезанной, как бы Игорь ни старался?*

Ответ. Можно. Решение. Не вырезанной останется центральная клеточка квадрата. В самом деле, пусть она вырезана. Для удобства рассуждений расположим квадрат так, чтобы содержащий эту клеточку прямоугольник 1×6 был горизонтален. Тогда в тех шести столбцах, где он расположен, вертикальный прямоугольник расположить нельзя. Два вертикальных прямоугольника в одном столбце тоже не помещаются. Поэтому вертикальных прямоугольников среди вырезанных не больше пяти. Горизонтально же вырезанных прямоугольников в каждой из 11 строк не больше одного. Поэтому всего получается не больше 16 вырезанных прямоугольников. Таким образом, если вырезано больше 16 прямоугольников, центральная клеточка не затронута.

Второй тур дистанционного этапа IX олимпиады имени Леонарда Эйлера

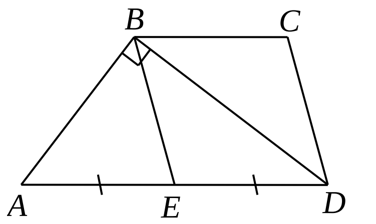
1. *Есть ли у числа 1…1 (1000 единиц) десятизначный делитель, все цифры которого различны?*

Ответ. Нет. Решение. Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45. Значит, такое число делится на 9. Число же 1…1 (1000 единиц) с суммой цифр 1000 не делится даже на 3.

2. *Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 < b$ и $b^2 < c$ и $c^2 < a$. Докажите, что все три числа a, b и c меньше 1.*

Решение. Пусть $a \geq 1$. Тогда $b > a^2 \geq 1$, $c > b^2 \geq 1$ и $a > c^2 > 1$. Но тогда $a^2 < b < b^2 < c < c^2 < a$, откуда $a < 1$. Противоречие.

3. *В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 2$, $BC = 1$, $\angle ABD = 90°$. Найдите сторону CD.*



Ответ. $CD = 1$. Решение. Пусть E — середина основания AD. Так как треугольник ABD прямоугольный, $BE = AE = DE = 1$. С другой стороны, $BC = DE$ и $BC \parallel DE$, так что $BCDE$ — параллелограмм. Следовательно, $CD = BE = 1$.

4. *Докажите, что число*

$$12345678987654321^2 \cdot 987654321012345679^2 + (12345678987654321^2 + 987654321012345679^2)10^{36}$$

является квадратом целого числа.

Решение. Пусть $x = 12345678987654321$, $y = 987654321012345679$. Тогда $x+y = 10^{18}$, и потому данное в условии выражение равно $x^2y^2+(x^2+y^2)(x+y)^2=(xy+x^2+y^2)^2$.

5. *Известно, что среди 100 шаров ровно 51 радиоактивный. Имеется прибор, в который можно положить два шара, и если оба радиоактивны, то загорится лампочка (а если хотя бы один из двух шаров не радиоактивен, то не загорится). Можно ли найти все радиоактивные шары, использовав прибор не более 145 раз?*

Ответ. Можно. Решение. Разобьём шары на 50 пар и испытаем их. Рассмотрим два возможных случая.

1) Ровно одно из этих испытаний выявило два радиоактивных шара. Тогда в каждой из остальных 49 пар ровно по одному радиоактивному шару. Испытав с одним из найденных радиоактивных по одному шару из каждой оставшейся пары, мы распознаем все 98 оставшихся шаров. Всего мы провели 50+49 = 99 испытаний.

2) По два радиоактивных шара выявилось хотя бы в двух испытаниях. Тогда 4 радиоактивных шара мы уже нашли. Испытаем с одним из найденных радиоактивных шаров 95 шаров из 48 оставшихся пар. После этого мы про 99 шаров будем знать, какие из них радиоактивны. Если таких шаров 50, оставшийся шар радиоактивен, а если 51, то нет. Мы нашли все радиоактивные шары за 50+95 = 145 испытаний.

Замечание. Более тонкими рассуждениями оценку 145 можно улучшить.

Второй тур дистанционного этапа X олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Четыре мальчика заглянули в коробку, где лежат цветные шарики. На вопрос, каких цветов шарики там лежат, они ответили так. Петя: «Красные, синие и зелёные». Вася: «Красные, синие и жёлтые». Коля: «Красные, жёлтые и зелёные». Миша: «Жёлтые, зелёные и синие». Могло ли случиться, что каждый из мальчиков один цвет назвал верно, а два — неверно?*

Ответ. Не могло. Решение. Заметим, что каждый цвет назвали ровно три мальчика. Поэтому количество верно названных цветов, если считать каждый цвет столько раз, сколько его назвали, должно делиться на 3, и потому не может равняться 4.

2. *Докажите, что если* $a+b+c+d = 0$ *и* $ab+cd+ac+bc+ad+bd = 0$, *то* $a = b = c = d = 0$.

Решение. Возводя равенство $a+b+c+d = 0$ в квадрат, получаем

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+cd+ac+bc+ad+bd) = 0,$$

откуда $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$, что возможно только при $a = b = c = d = 0$.

3. *Боря нарисовал девять отрезков, три из которых равны трём высотам треугольника ABC, три — трём биссектрисам, три — трём медианам. Оказалось, что для любого из нарисованных отрезков среди остальных восьми найдётся равный ему. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.*

Решение. Пусть AA_1 — самая короткая из высот треугольника ABC. Если она равняется медиане AA_2 или биссектрисе AA_3, то треугольник, очевидно, равнобедренный. Если она равна медиане BB_2 или биссектрисе BB_3, то тогда AA_1 не короче высоты BB_1. Значит, она равна BB_1, так как по нашему предположению AA_1 — самая короткая из высот. Итак, всё свелось к случаю, когда $AA_1 = BB_1$. Но тогда прямоугольные треугольники ABA_1 и BAB_1 равны по катету и гипотенузе, откуда $\angle A = \angle B$.

4. *По окружности красным карандашом записали 49 различных натуральных чисел, меньших 100. Между каждыми двумя соседними красными числами записали синим их наибольший общий делитель. Могло ли случиться, что все синие числа различны?*

Ответ. Не могло. Решение. Заметим, что НОД двух различных чисел, меньших 100, должен быть меньше 50, так как хотя бы одно из этих двух чисел больше НОД по крайней мере вдвое. Поэтому если все синие числа различны, то среди них есть все числа от 1 до 49. В частности, среди них есть простое число 47. Оно может получиться только как НОД красных чисел 47 и 94. Тогда второе синее число, соседнее с красным числом 47, равно 1. Аналогично показывается, что среди красных чисел есть простые числа 41 и 43, и рядом с каждым из них также должна стоять синяя единица. Но тогда синих единиц должно быть по крайней мере две, так как одно синее число соседствует только с двумя красными. Противоречие.

5. *Палочка разломана на 15 частей так, что ни из каких трёх частей нельзя сложить треугольник. Докажите, что среди частей есть такая, которая длиннее трети исходной палочки.*

Решение. Упорядочим части по длине: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{15}$. По неравенству треугольника длина каждой части не меньше суммы длин любых двух более коротких частей. Поэтому при любом $k \leq 13$ имеем $a_k \geq a_{k+1}+a_{k+2} \geq 2a_{k+2}$, откуда $a_{k+2} \leq a_k/2$. Отсюда получаем:

$$a_3+a_5+\ldots+a_{15} \leq a_3+a_3/2+\ldots+a_3/2^6 < 2a_3,\quad a_2+a_4+\ldots+a_{14} \leq a_2+a_2/2+\ldots+a_2/2^6 < 2a_2.$$

Следовательно, $a_2+a_3+\ldots+a_{14}+a_{15} < 2a_2+2a_3 \leq 2a_1$, откуда $a_1+a_2+\ldots+a_{14}+a_{15} < 3a_1$, что и требовалось доказать.

Третий тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Найдите все пятизначные числа, у которых вторая цифра впятеро больше первой, а произведение всех пяти цифр равно 1000.*

Ответ. 15855, 15585, 15558. Решение**.** Первая цифра может равняться только 1, иначе вторая цифра будет больше 9. Тогда вторая цифра — 5, и получается, что произведение трёх последних цифр должно равняться 200. Поскольку 200 = 5х5х8, две из этих трёх цифр должны равняться 5. Но тогда третья цифра должна быть восьмёркой, откуда и получаем ответ.

2. *Числа a, b и c таковы, что $a > b$ и $(a–b)(b–c)(c–a) > 0$. Что больше: a или c?*

Ответ. $a > c$. Решение**.** Очевидно, среди трёх данных чисел нет равных. Поскольку $a > b$, $a–b > 0$, откуда $(b–c)(c–a) > 0$. Допустим, $c > a$. Тогда $c–a > 0$ и $b–c > 0$, то есть $b > c > a$ — противоречие.

3. *Двое по очереди проводят на плоскости прямые, причем дважды одну прямую проводить нельзя. Выигрывает тот, после хода которого число кусков, на которые плоскость разбита проведенными прямыми, впервые разделится на 5. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер, и как ему для этого надо играть?*

Ответ. Второй. Первое решение. Второй своим первым ходом проводит прямую, параллельную той, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную двум уже проведённым, после его хода плоскость разобьётся на 4 части. Тогда второй проводит прямую, параллельную трём проведённым, и побеждает: частей получается ровно 5. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую две уже проведённые, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и тоже побеждает, потому что частей получается 10. Второе решение. Второй своим первым ходом проводит прямую, пересекающую ту, которую провёл первый. Если своим вторым ходом первый проведёт прямую, параллельную одной из двух проведённых или проходящую через точку их пересечения, после его хода плоскость разобьётся на 6 частей. Тогда второй проводит прямую, пересекающую три уже проведённые в трёх различных точках, и побеждает, потому что частей получается 10. Если же своим вторым ходом первый проведёт прямую, пересекающую обе проведённые в двух различных точках, плоскость разобьётся на 7 частей. Тогда второй проведёт прямую, параллельную одной из проведённых и не проходящую через точки их пересечения, и частей снова получится 10.

4. *На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F таким образом, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.*

Решение**.** Из условия задачи следует, что $\angle EFD = \angle ADF = \angle AFD$ (первое равенство верно, так как $EF \parallel AC$, второе — поскольку $AF = AD$). Поэтому равны и углы AFB и EFB, смежные с углами AFD и EFD. Кроме того, по условию $\angle ABF = \angle EBF$. Следовательно, треугольники BFE и BFA равны по общей стороне BF и двум прилежащим к ней углам. Поэтому равны и их соответственные стороны BE и AB.

5. *В футбольном турнире, где каждая команда по одному разу сыграла с каждой, участвовали команды А, Б, В, Г, Д и Е. За победу команда получала 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. В итоге оказалось, что команды А, Б, В, Г и Д набрали по 7 очков. Какое наибольшее количество очков могла набрать команда Е?*

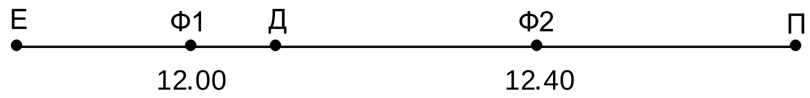
Ответ. 7 очков. Решение**.** В матче, где одна из команд победила, команды вместе набирают 3 очка, в матче, закончившемся вничью — 2 очка. Поскольку 7 не делится на 3, команда, набравшая 7 очков, сделала хотя бы одну ничью. Так как таких команд пять, ничьих в турнире было сделано по крайней мере три. Всего матчей, как легко проверить, было сыграно 15. Поэтому все команды вместе набрали не больше, чем 2×3+3×12 = 42 очка. Из них 35 очков набрали команды А, Б, В, Г и Д. Поэтому команда Е набрала не больше 42–35 = 7 очков. Как она могла набрать ровно 7 очков, показано в таблице справа.

	А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*
А	х	3	3	1	0	0
Б	0	х	3	3	1	0
В	0	0	х	3	3	1
Г	1	0	0	х	3	3
Д	3	1	0	0	х	3
Е	3	3	1	0	0	х

Третий тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *У дороги из Ёлкино в Палкино растёт дуб, от которого до Ёлкино вдвое ближе, чем до Палкино. Федя, едущий с постоянной (и большей 0) скоростью из Ёлкино в Палкино, в 12.00 был вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. В 12.40 снова оказалось, что Федя вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. Когда Федя приедет в Палкино?*

Ответ. В 13.10. Решение. На дороге из Ёлкино в Палкино есть две точки, которые вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. Одна из них ($Ф_1$) находится между Ёлкино и дубом, другая ($Ф_2$) — между дубом и Палкино (см. рис.). Для удобства подсчетов примем весь путь от Ёлкино до Палкино за 9. Тогда



ЕД = 3, $Ф_1$Д = 1, $ЕФ_2$ = 2ЕД = ЕД+$ДФ_2$, откуда $ДФ_2$ = ЕД = 3 и $Ф_2П$ = ЕП–$ЕФ_2$ = 3. Путь $Ф_1Ф_2$ = $Ф_1Д$+$ДФ_2$ длины 4 Федя проехал за 40 минут, поэтому путь $Ф_2П$ длины 3 он проехал за 30 минут, откуда и получаем ответ.

2. *Каждый из трёх мальчиков либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им сообщили шесть натуральных чисел. После этого каждый из мальчиков сделал по два утверждения.*

Петя: 1) Это шесть последовательных натуральных чисел.

2) Сумма этих шести чисел чётна.

Вася: 1) Это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Коля — лжец.

Коля: 1) Все эти числа различны и делятся на 3.

2) Каждое из этих чисел меньше 20.

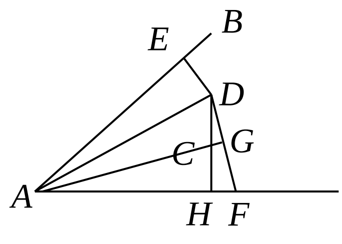
Какие числа сообщили мальчикам?

Ответ: 3, 6, 9, 12, 15, 18. Решение. Среди шести последовательных натуральных чисел ровно три нечётных. Поэтому их сумма нечётна. Значит, Петя солгал либо в первый раз, либо во второй, и потому он лжец, то есть солгал оба раза. Но тогда лжец и Вася, потому что в первом своём высказывании он назвал шесть последовательных натуральных чисел. Так как Вася сказал, что Коля — лжец, на самом деле Коля говорит правду. Есть только 6 натуральных чисел, делящихся на 3 и меньших 20, что и даёт нам ответ.

3. *Есть шесть внешне одинаковых монет. Четыре из них настоящие, две — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, каждая из фальшивых весит меньше настоящей, и веса фальшивых монет различны. Есть весы с двумя чашками: если на них положить монеты, перевесит чашка, монеты на которой весят больше (но насколько больше, мы не узнаем). Как за три взвешивания найти обе фальшивые монеты? (Определять, какая из двух фальшивых монет легче, не требуется.)*

Решение. Разделим монеты на три пары и сравним две монеты в каждой паре. Если фальшивые монеты попали в две разные пары, то мы найдём их, как более лёгкие в своих парах (а в третьей паре будет равновесие). Если же они попали в одну пару, то в двух парах будет равновесие, и мы поймём, что обе фальшивые монеты в третьей паре. Замечание. За два взвешивания с гарантией найти обе фальшивые нельзя. В самом деле, есть 15 возможных вариантов расположения двух фальшивых монет среди шести данных, а каждое взвешивание, если нам не везёт, уменьшает совокупность подходящих вариантов не более, чем в три раза.

4. *Внутри острого угла BAC взяли такую точку D, что угол CAD вдвое больше угла BAD. Могла ли точка D оказаться вдвое дальше от прямой AC, чем от прямой AB?*



Ответ. Не могло. Решение. Опустим из точки D перпендикуляр DE на прямую AB, а на луче AC отложим отрезок $AF = AD$. В равнобедренном треугольнике ADF проведём медиану AG. Поскольку она является также биссектрисой и высотой, углы DAE и DAG равны, и прямоугольные треугольники AED и AGD равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $DG = GF = ED$, откуда

$DF = 2DE$. Но отрезок DF не перпендикулярен AC, и потому длиннее перпендикуляра DH, опущенного из точки D на прямую AC. Поэтому $DH < 2DE \Rightarrow DH \neq 2DE$.

5. *Числитель каждой из 48 дробей равен одному из чисел 2, 3, …, 49, знаменатель — тоже, причём каждое из этих 48 чисел встречается как среди числителей, так и среди знаменателей. Докажите, что либо одна из этих дробей равна целому числу, либо из них можно выбрать не более 25 дробей, произведение которых — целое число.*

Решение. Рассмотрим дробь $a_1/2$ со знаменателем 2. Если a_1 четно, то мы уже получили целое число. В противном случае умножим $a_1/2$ на дробь a_2/a_1, результат — на дробь a_3/a_2 и так до тех пор, пока очередной числитель a_n не станет чётным (такое когда-то случится, потому что числители не могут повторяться). После этого в произведении получится целое число $a_n/2$. Поскольку различных нечётных знаменателей у нас 24, мы перемножили не больше 25 дробей.

Третий тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Перед распродажей ложка и вилка стоили одинаково. На распродаже цену ложки уменьшили на 1 рубль, а цену вилки — в 10 раз. Могло ли случиться, что ложка на распродаже продавалась дешевле вилки?*

Ответ: Могло. Решение. Пусть начальная цена была 1 р. 10 коп. Тогда на распродаже ложка стоила 10 коп., а вилка — 11 коп. Замечание. Пусть x — начальная цена в копейках. Тогда x должно быть больше 100 (поскольку цена ложки на распродаже должна быть положительной), делиться на 10 (поскольку цена вилки на распродаже должна выражаться целым положительным числом копеек) и удовлетворять неравенству $x-100 < x/10 \Leftrightarrow x < 111\ 1/9$. Таким образом, $x = 110$ — *единственная* цена, удовлетворяющая всем перечисленным условиям.

2. *Найдите все такие тройки чисел m, n, k, что каждое из уравнений $mx^2+n = 0$, $nx^2+k = 0$ и $kx^2+m = 0$ имеет хотя бы одно решение.*

Ответ: $m = n = k = 0$. Решение. Если $m = 0$, то из $mx^2+n = 0$ получаем $n = 0$, а из $nx^2+k = 0$ — $k = 0$. Аналогично для $n = 0$ и $k = 0$. Таким образом, если одно из чисел m, n, k равно 0, то равны 0 и два других. Допустим, ни одно из чисел m, n, k не равно 0. Тогда из первого уравнения следует, что числа m и n имеют разные знаки, а из второго — что числа n и k имеют разные знаки. Но тогда числа m и k имеют один знак, и в третьем уравнении $x^2 = -m/k < 0$, то есть оно не имеет решений. Полученное противоречие показывает, что отличными от 0 числа m, n и k быть не могут. Замечание. То, что каждое из уравнений, указанных в условии, имеет решение, не означает, что все три уравнения имеют *одно и то же* решение. Поэтому доказательство, что у системы из трех данных уравнений есть решение только при $m = n = k = 0$, не является решением задачи.

3. *В 1001 году на багдадском базаре ковёр-самолёт стоил 1 динар. Затем в течение 99 лет он каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год подорожал в 3 раза. Мог ли в 1100 году такой же ковёр-самолёт стоить 152 динара?*

Ответ: Не мог. Первое решение. Если бы ковёр-самолёт каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год не дорожал бы совсем, то в 1100 году он стоил бы 1+98 = 99 динаров. Значит, в результате подорожания втрое к стоимости ковра добавились 152–99 = 53 динара. Но в результате подорожания втрое к стоимости ковра добавляется удвоенная его стоимость, то есть чётное число, а число 53 — нечётное. Второе решение. В год, когда цена утроилась, её чётность не изменилась, а остальные 98 лет чётность менялась каждый год. Поэтому с 1001 по 1100 год чётность цены менялась чётное количество раз. Следовательно, в 1100 году цена, как и в 1001 году, была нечётной, и 152 динара ковер стоить не мог. Третье решение. За 98 лет, когда цена ковра росла на 1 динар, он подорожал на 98 динаров, а в тот год, когда его цена возросла втрое, к его цене в предыдущем году прибавилась удвоенная такая же цена. Поэтому чем позже ковер подорожал втрое, тем больше его цена в 1100 году. Если ковер подорожал втрое в 1027 году, то в 1100 году он будет стоить $3\cdot26+(1100-1027) = 151$ динар, а если в 1028 году — то $3\cdot27+(1100-1028) = 153$ динара. При подорожании втрое позже 1028 года он будет в 1100 году стоить больше 153 динаров, а раньше 1027 года — меньше 151 динара. Следовательно, 152 динара в 1100 году ковер стоить не мог.

4. *Точка D лежит внутри треугольника ABC. Может ли случиться, что самая короткая сторона треугольника BCD равна 1, самая короткая сторона треугольника ACD равна 2, а самая короткая сторона треугольника ABD равна 3?*

Ответ: Не может. Решение. Поскольку по условию $AD \geq 3$ и $CD \geq 2$, в треугольнике BCD единице может равняться только BC, а в треугольнике ACD двойке может равняться CD или AC. Но в обоих случаях не выполнено неравенство треугольника: если $AC = 2$, то $AB \geq 3 = BC+AC$ в треугольнике ABC, а если $CD = 2$, то $BD \geq 3 = BC+CD$ в треугольнике BCD.

5. *Шестизначное число N совпадает с каждым из пяти шестизначных чисел A, B, C, D, E в трёх разрядах. Докажите, что среди чисел A, B, C, D, E найдутся два, совпадающие по крайней мере в двух разрядах.*

Решение. Запишем число N и поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом A. Затем поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом B и т.д. В итоге мы поставим 15 крестиков. Значит, найдётся разряд, под которым крестиков не меньше трёх. Поэтому среди чисел A, B, C, D, E найдутся три, совпадающие в одном из разрядов (назовём его *отмеченным*). Оставим только крестики, соответствующие этим числам и не стоящие в отмеченном разряде. Их шесть, а не отмеченных разрядов — пять, поэтому среди них найдутся два, стоящие в одном разряде. Числа, соответствующие этим крестикам — искомые: они совпадают в этом разряде, а также в отмеченном.

Третий тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Коля, Вася и Петя пошли за покупками. Всего у них с собой 2200 рублей, и ни у кого нет монет мельче рубля. У Коли с собой в 18 раз меньше денег, чем у Васи. Докажите, что Петя сможет купить мороженое за 15 рублей.*

Решение. Пусть у Коли n рублей. Тогда у Васи $18n$ рублей, а у Коли с Васей вместе — $19n$ рублей. Так как ни у кого нет монет мельче рубля, n — целое число. Поделив с остатком 2200 на 19, получим $2200 = 115 \cdot 19+15$. Таким образом, у Коли с Васей вместе не больше $115 \cdot 19 = 2185$ рублей, поэтому у Пети — не меньше 15 рублей.

2. *На стороне AC треугольника ABC с углом 120 градусов при вершине B отмечены такие точки D и E, что AD = AB и CE = CB. Из точки D опущен перпендикуляр DF на прямую BE. Найдите отношение BD/DF.*

Ответ. 2. Решение. Положим $\angle CAB = \alpha$, $\angle ACB = \beta$. Так как $AD = AB$ и $CE = CB$, имеем

$$\angle DBE = \angle DBA+\angle EBC-\angle ABC = (180°-\alpha)/2+(180°-\beta)/2-120° = 60°-(\alpha+\beta)/2 = 30°.$$

Таким образом, в прямоугольном треугольнике BFD угол при вершине B равен 30°, откуда $BD/DF = 2$.

3. *30 человек выстроены в шесть шеренг по пять человек в каждой. Каждый из них либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт, и всем им известно, кто из них рыцарь, а кто — лжец. Журналист спросил у каждого из них: «Верно ли, что найдутся хотя бы 4 шеренги, в каждой из которых лжецов больше половины?». Какое наибольшее количество ответов "да" он мог услышать?*

Ответ. 21. Решение. Назовем шеренгу *синей*, если в ней больше половины (то есть не меньше трёх) лжецов и *красной*, если лжецов в ней не больше двух.

Пусть «да» сказали рыцари. Тогда у нас не больше двух красных и не меньше четырёх синих шеренг. В красных шеренгах стоят не больше 10 рыцарей, в синих — не больше $2 \cdot 4 = 8$ рыцарей. Поэтому ответов «да» в этом случае не больше 18.

Пусть «да» сказали лжецы. Тогда у нас не больше трёх синих шеренг и не меньше трёх красных. В синих шеренгах не больше 15 лжецов, в красных — не больше $2 \cdot 3 = 6$ лжецов, всего — не больше 21 лжеца, то есть ответов «да» в этом случае не больше 21. Ровно 21 ответ «да» возможен, если в трёх шеренгах стоит по 5 лжецов, а в трёх других — по 2 лжеца.

4. *Миша и Маша ехали на поезде в Киров. Миша лежал на полке, а Маша смотрела в окно. «Далеко ли до Кирова?» — спросил Миша у Маши в 12.00. «73 километра», — ответила Маша. На тот же вопрос, заданный в 12.15 и 12.45, Маша ответила: «62 километра» и «37 километров». Известно, что Маша, если расстояние составляло не целое число километров, каждый раз округляла его до ближайшего целого* *числа (а если таких было два — то до любого из них по своему выбору). Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной. Укажите все возможности и докажите, что других нет.*

Ответ. 48 км/ч. Решение. Поскольку Маша каждый раз округляла расстояние до ближайшего целого числа, в 12.00 до Кирова было не меньше, чем 72,5 и не больше, чем 73,5 км, в 12.15 — не меньше, чем 61,5 и не больше, чем 62,5 км, а в 12.45 — не меньше, чем 36,5 и не больше, чем 37,5 км. Поэтому за 15 минут с 12.00 до 12.15 поезд проехал не меньше 10 и не больше 12 км, а за 30 минут с 12.15 до 12.45 — не меньше 24 и не больше 26 км. Так как 15 минут — это четверть часа, а 30 минут — половина часа, первое означает, что скорость поезда — не меньше $10\times4 = 40$ км/ч и не больше $12\times4 = 48$ км/ч, а второе — что она не меньше $24\times2 = 48$ км/ч и не больше, чем $26\times2 = 52$ км/ч. Единственная скорость, удовлетворяющая обоим этим условиям, составляет 48 км/ч.

5. *Двое играют в игру. Вначале у них есть прямоугольный лист бумаги размером $m\times n$, где m и n — натуральные числа, большие 1. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок разрезает имеющийся прямоугольник на два, один из которых имеет площадь 1, и выбрасывает прямоугольник единичной площади. Проигрывает тот, после хода которого у оставшегося прямоугольника есть сторона длины строго меньше 1 или остался квадрат 1×1. Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр, — и как ему для этого надо играть?*

Ответ. Если площадь исходного прямоугольника нечётна, выигрывает первый, если чётна — второй. Решение. *Лемма*. Если площадь S прямоугольника не меньше 3, и обе его стороны длиннее 1, то, отрезав от него единичный прямоугольник параллельно меньшей стороне, мы получим прямоугольник, у которого обе стороны также длиннее 1. *Доказательство*. У прямоугольника, площадь которого не меньше 3, длина наибольшей стороны больше 1,5 — иначе его площадь меньше $1{,}5^2 = 2{,}25$. Если мы отрежем от него прямоугольник площади 1 параллельно меньшей стороне, большая сторона уменьшится на свою $1/S$-ую часть, то есть не больше, чем на треть своей длины. Значит, её длина останется больше 1. Длина стороны, параллельно которой был проведён разрез, не изменится. Лемма доказана.

Итак, играющие могут делать не ведущие к немедленному проигрышу ходы (например, параллельно меньшей стороне оставшегося прямоугольника), пока площадь оставшейся части не окажется равной 2. Это случится после $mn-2$ ходов. Если это число чётно, очередь хода будет за первым, если нечётно — за вторым, и тот, кто делает этот ход, проигрывает. В самом деле, после этого хода останется прямоугольник площади 1. Если обе его стороны равны 1, то это квадрат 1×1, а в остальных случаях меньшая его сторона короче 1.

Третий тур дистанционного этапа VII олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Улитка ползет вокруг циферблата часов против часовой стрелки с постоянной скоростью. Она стартовала в 12.00 с отметки 12 часов, и закончила полный круг ровно в 14.00. Какое время показывали часы, когда улитка в ходе своего движения встречалась с минутной стрелкой?*

Ответ. 12-40 и 13-20. Решение. Из условия следует, что улитка двигается по циферблату в 2 раза медленнее минутной стрелки. Поэтому к 1-й встрече она проползает треть всего круга, а стрелка – две трети. Это означает, что первая встреча происходит в 12-40. Аналогично, между первой и второй встречей снова проходит 40 минут. Это означает, что вторая встреча случается в 13-20.

2. *В каждую клетку таблицы 2×2 вписано по одному числу. Все числа различны, сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке, а произведение чисел в первом столбце равно произведению чисел во втором столбце. Найдите сумму всех четырёх чисел.*

Ответ. 0. Решение. Пусть в верхней строке таблицы стоят (слева направо) числа a и b, а в нижней (слева направо) — числа c и d. По условию $a+b = c+d$ и $ac = bd$. Выражая c из первого уравнения и подставляя во второе, получаем $a(a+b-d) = bd \Leftrightarrow (a+b)(a-d) = 0$, откуда, поскольку $a-d \neq 0$, получаем $a = -b$. Аналогично, $d = -c$, откуда и получаем ответ.

3. *Биссектрисы углов A и C разрезают неравнобедренный треугольник ABC на четырёхугольник и три треугольника, причём среди этих трёх треугольников есть два равнобедренных. Найдите углы треугольника ABC.*

Ответ. 180°/7, 2·180°/7, 4·180°/7. Решение. Пусть AK и CM — биссектрисы, I — их точка пересечения. Посмотрим, какие углы в каких треугольниках могут быть равными. Треугольник AIC равнобедренным быть не может: в нём $\angle AIC = 90°+\angle ABC/2$ — тупой, а $\angle IAC = \angle BAC/2 \neq \angle BCA/2 = \angle ICA$. Невозможны также равенства $\angle MIA = \angle MAI$ и $\angle KCI = \angle KIC$, так как внешний угол треугольника AIC не может быть равен внутреннему, не смежному с ним. Наконец, невозможно одновременное выполнение равенств $\angle MIA = \angle IMA$ и $\angle KIC = \angle IKC$, или одновременное выполнение равенств $\angle IAM = \angle IMA$ и $\angle ICK = \angle IKC$, так как тогда $\angle BAC = \angle ACB$. Поэтому остаётся единственная (с точностью до перестановки точек A и C) возможность:

$$\angle AIM = \angle AMI = 90°–\angle ABC/2 = 90°–\angle BAC/4,\ \angle ICK = \angle IKC = \angle ACB/2 = 90°+\angle ABC/2–\angle ACB/2.$$

Это означает, что $2\angle ABC = \angle BAC$ и $\angle ACB = 90°+\angle ABC/2$. Тогда $7\angle ABC/2 = 90°$, что и приводит к ответу.

4. *Все делители натурального числа N, кроме N и единицы, выписали в ряд по убыванию:* $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$*. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (то есть* d_1 *делится на* d_k*,* d_2 *— на* $d_{k–1}$ *и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.*

Решение. Легко видеть, что выполняются равенства $N = d_1d_k = d_2d_{k–1} = \ldots$ Это позволяет переформулировать условие задачи следующим образом: если произведение двух делителей числа N равно этому числу, то больший из этих делителей делится на меньший. Пусть число N кроме простого делителя p имеет другие простые делители. Тогда N можно представить в виде произведения двух взаимно простых сомножителей, больших 1, что противоречит условию задачи. Поэтому число N есть степень простого числа, откуда и вытекает утверждение задачи.

5. *Двое играют в такую игру. За один ход можно положить в одну из клеток квадратной доски 1001×1001 один камешек (первоначально доска пуста; в одной клетке может лежать любое число камешков). Ходят по очереди. Как только в каком-то ряду (вертикали или горизонтали) оказывается более 5 камешков, сделавший последний ход признается проигравшим. Кто из игроков сможет выиграть независимо от действий соперника: тот, кто делает первый ход или тот, кто ходит вторым?*

Ответ. Первый. Первое решение. До того, как на доску выложен 5005-ый камешек, первый находит строку и столбец, в которых находится менее пяти камешков (такие обязательно найдутся), и кладёт камешек в клетку на их пересечении. Если второй не ошибся раньше, после того, как на доску будет положен 5005-ый камешек (а его, как и все нечётные, положит первый), мы приходим к ситуации, в которой в каждой строке и каждом столбце лежит ровно по 5 камешков. В ней второй проигрывает, какой бы ход он ни сделал. Второе решение. Пусть первым ходом первый положит камешек в центральную клетку доски, а затем кладет каждый свой камешек симметрично относительно центра доски последнему камешку соперника. Тогда если первый делает ход в строку или столбец, содержащий центральную клетку, там после этого хода будет нечетное числу камешков, а если камешек первого оказался в строке или столбце, не содержащем центральную клетку, там после его хода станет столько же камешков, сколько в симметричной относительно центра доски строке (столбце). Таким образом, если после хода первого в какой-то строке или каком-то столбце оказалось больше 5 камешков, то и до его хода были строка или столбец, где находилось больше 5 камешков. Значит, первый при такой игре не может проиграть, а так как игра конечна, то второй рано или поздно проиграет.

Третий тур дистанционного этапа VIII олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *На берегах озера по кругу стоит 5 пристаней, на каждой человек, у одного из них одноместная лодка. Люди с соседних пристаней в ссоре, и встречаться друг с другом не хотят. Как каждому из них перебраться на соседнюю по часовой стрелке пристань, если передвигаться можно только по озеру?*

Решение. Достаточно проплыть два раза против часовой стрелки по образованной диагоналями звёздочке. Первые 5 рейсов: $1 \to 4$, $4 \to 2$, $2 \to 5$, $5 \to 3$, $3 \to 1$. Каждый сдвинулся на две позиции против часовой стрелки, то есть на пристанях с 1-й по 5-ю находятся люди №№ 3, 4, 5, 1, 2 соответственно. Теперь каждый может плыть на нужную ему пристань, поскольку находящемуся там он готов передать лодку: $3 \to 4$, $1 \to 2$, $4 \to 5$, $2 \to 3$, $5 \to 1$.

2. *В марсианском парламенте заседают депутаты трёх партий: «Гласные», «Согласные» и «Шипящие» — по 50 депутатов от каждой партии. На голосование был поставлен проект закона «О реконструкции марсианских каналов». После голосования по 30 депутатов от каждой партии сказали, что они проголосовали «за», по 10 сказали, что проголосовали против, а остальные сказали, что воздержались. Известно, что из «согласных» депутатов сказали правду те и только те, кто поддержал законопроект, из «гласных» — те и только те, кто проголосовал против, а из «шипящих» — воздержавшиеся.*

Законопроект считается принятым, если за него подано не менее 50% голосов. Был ли принят законопроект?

Ответ. Нет. Решение. Те из «гласных» или «шипящих», кто голосовал «за», врали, то есть ответили, что голосовали «против» или воздержались. В обеих партиях так ответили всего по 20 человек. Даже если все так ответившие проголосовали «за», то это не более 40 человек. Те из «согласных», кто голосовал «за», говорили правду, то есть ответили, что голосовали «за». В партии «Согласные» так ответили 30 человек. Даже если все так ответившие проголосовали «за», то это не более 30 человек. Значит, суммарно по трём партиям «за» проголосовало не более 70 человек. А 50% голосов — это 75 человек. Поэтому проект не прошёл.

3. *В треугольнике ABC угол C в 2 раза больше угла B, CD — биссектриса. Из середины M стороны BC опущен перпендикуляр MH на отрезок CD. На стороне AB нашлась такая точка K, что KMH — равносторонний треугольник. Докажите, что точки M, H и A лежат на одной прямой.*

Первое решение. Так как $\angle DCB = \angle C/2 = \angle B$, DM — медиана, биссектриса и высота в равнобедренном треугольнике BDC. Опустим из точки M перпендикуляр ME на прямую AB. Тогда $ME = MH = MK$, откуда $K = E$. Далее, в прямоугольных треугольниках CHM и BKM сумма углов при вершине M равна $180°– \angle HMK = 120°$, откуда получаем, что каждый из углов DCM и DBM равен 30°. Поэтому в треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 90°$. Осталось заметить, что тогда треугольник ACM — равносторонний, и потому $CH \perp AM$, откуда и вытекает утверждение задачи.

Второе решение. Рассмотрим треугольники CHM и KMB. В них равны по две стороны и по углу (правда, лежащему не между равными сторонами), причём треугольник CHM прямоугольный. Но треугольники с двумя равными сторонами и равной парой углов могут не быть равными только, если один из них тупоугольный, а другой остроугольный. Значит, треугольники CHM и KMB равны, откуда $CH = BK$ и $\angle AKM = \angle CHM = 90°$. Далее рассуждаем как в первом решении.

4. *На доске написали 10 натуральных чисел. Если отметить любые три из написанных чисел, то сумма всех трёх будет делиться на два числа из этой тройки. Докажите, что среди написанных чисел есть равные.*

Первое решение. Если $a \le b \le c \le d \le e$ — пять из данных чисел, то из сумм $a+d+e$, $b+d+e$, $c+d+e$ две должны делиться на одно и то же из чисел d и e. Но разность этих двух сумм равна разности каких-то двух из чисел a, b, c, и потому меньше d. Значит, она равна 0, и, следовательно, среди чисел a, b, c есть два равных.

Второе решение. Пусть в наборе все числа различны. Возьмем три наименьших числа: $a < b < c$. Рассмотрим любое из оставшихся чисел x и две тройки $\{a, c, x\}$, $\{b, c, x\}$. Обе суммы $a+c+x$ и $b+c+x$ не могут делиться на c одновременно, поскольку разность между второй и первой суммой положительна, но меньше c. Значит, хотя бы одна из этих сумм делится на x. Но $a+c < 2x$ и $b+c < 2x$, поэтому выполнено одно из равенств $a+c = x$ или $b+c = x$. Получается, что любое число, не входящее в первую тройку, равно сумме двух чисел из этой тройки. Но тогда различных чисел во всём наборе не более шести.

Замечание. Продолжая рассуждение, проведенное в первом решении, нетрудно показать, что среди данных чисел есть по крайней мере семь равных.

5. *Существуют ли такие два числа, что первое больше второго в 2016 раз, а сумма его цифр меньше суммы цифр второго в 2016 раз?*

Ответ. Да, существуют. Решение. Рассмотрим, например, число A вида 11..15, где количество единиц больше 10. Умножая A на 2016, получаем:

$$11\ldots15\times2016 = 10080+20160+201600+2016000+\ldots+201600\ldots0 = 2240\ldots.007840$$

(тут образуется много девяток ввиду 2+0+1+6 = 9, но они все исчезают за счет бегущего перехода через десяток). Сумма цифр произведения равна 27 независимо от количеств единиц в записи числа A. Чтобы сумма цифр числа A была в 2016 раз больше, в его записи должно быть 27×2016–5 единиц.

Третий тур дистанционного этапа IX олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Учительница нарисовала на доске прямоугольник ABCD. Ученик Петя разделил этот прямоугольник на две прямоугольника прямой, параллельной стороне AB. Оказалось, что площади этих частей относятся как 1:2, а периметры как 3:5 (в том же порядке). Ученик Вася разделил этот прямоугольник на две части прямой, параллельной стороне BC. Площади новых частей тоже относятся как 1:2. Как относятся их периметры?*

Ответ. 20:19. Решение. Пусть $AB = a$, $BC = b$, и первая прямая делит сторону BC на отрезки x, $b–x$. Тогда по условию $b–x = 2x$ и $5(x+a) = 3(b–x+a)$, откуда $b = 6a$. Пусть теперь вторая прямая делит сторону AB на отрезки y, $a–y$. По условию $y = 2(a–y)$, то есть $y = 2a/3$. Тогда отношение периметров равно $(y+b)/(a–y+b) = 20:19$.

2. *В треугольнике ABC на стороне BC взята точка K. KM и KP — биссектрисы треугольников AKB и AKC соответственно. Оказалось, что диагональ MK делит четырёхугольник BMPK на два равных треугольника. Докажите, что M — середина AB.*

Решение. Прямые KM и MP перпендикулярны, как биссектрисы смежных углов. Поэтому треугольник BMK тоже прямоугольный. В треугольнике MBK угол BKM — острый. Так как сторона MK у двух наших треугольников — общая, угол MBK равен углу MPK, который также является острым. Значит, в треугольнике MBK прямым является угол BMK. Но тогда в треугольнике ABK высота является высотой и биссектрисой, а, значит, и медианой.

3. *Решите ребус УХА = НОК(УХ, УА, ХА). Здесь У, Х, А — три различные цифры. Двузначные и трёхзначные числа не могут начинаться с нуля. Напомним, что НОК нескольких натуральных чисел — наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из них.*

Ответ. 150 = НОК(15, 10, 50). Решение. Так как УХА делится на УХ, А = 0, то есть число имеет вид УХ0. Так как УХ0 делится на У0 и Х0, УХ делится на У и Х, откуда следует, что Х делится на У, а 10У делится на Х. Пусть Х = М·У. Тогда 10У делится на М·У, откуда 10 делится на М, то есть М = 2 или М = 5. Условию Х = 2У удовлетворяют только числа 120, 240, 360, 480, а условию Х = 5У — только число 150. Проверка показывает, что подходит только число 150.

4. *Двадцать восемь лямзиков весами 2, 3, 4 и 5 кг (по 7 лямзиков каждого веса) переправились через реку на вёсельной лодке, выдерживающей вес 10 кг. Известно, что каждый лямзик грёб не более двух раз. Докажите, что грести пришлось не менее чем 12 лямзикам. У лодки один гребец, без гребца лодка плыть не может.*

Решение. Пусть гребли не более 11 лямзиков. То было не более 22 перевозок. Значит, рейсов «туда» было бы не более одиннадцати. На другой берег нужно перевезти (2+3+4+5)·7 = 98 кг, поэтому рейсов «туда» не может быть меньше 10. Значит возможны два варианта: «туда 10, обратно 9» или «туда 11, обратно 10». Так как тех, кто вёз лодку обратно, нужно вернуть, в любом случае «туда» нужно перевезти не менее 98+18 = 116 кг, но даже за 11 рейсов столько не перевезёшь. Противоречие.

5. *Петя отмечает на плоскости четыре точки так, чтобы их все нельзя было зачеркнуть двумя параллельными прямыми. Из прямых, проходящих через пары точек, Вася выбирает две, измеряет угол между ними и платит Пете сумму, равную градусной мере угла. Какую наибольшую сумму может гарантировать себе Петя?*

Ответ. 30. Решение. *Оценка*. Есть 6 пар точек, то есть 6 возможных прямых. По условию, среди них нет параллельных. Проведём через одну точку шесть параллельных им прямых. Они разобьют плоскость на 12 углов, поэтому есть угол не более 30 градусов. *Пример.* Возьмём произвольный отрезок AC и по разные стороны от него построим равносторонний треугольник ABC и равнобедренный треугольник ADB с углом 120° при вершине D. Легко убедиться, что угол между любыми двумя из шести прямых, заданных точками A, B, C, D, не меньше 30 градусов.

Третий тур дистанционного этапа X олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Винтик и Шпунтик смастерили машину «Тяни-толкай», которая едет вперед на сиропчике с расходом топлива 3л/км, а назад – на апельсиновом соке с расходом топлива 5л/км. Выехав из дома, они вели машину по очереди. Винтик проехал за рулём в обе стороны 12 км. Шпунтик ехал вперед вдвое меньше, чем Винтик, а назад проехал вдвое больше, после чего имевшиеся 75 литров топлива закончились. Сколько километров Винтику и Шпунтику придется возвращаться домой пешком?*

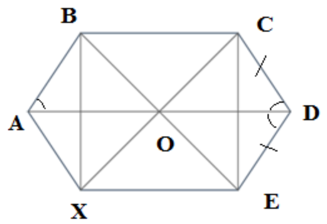
Ответ. 9 км. Решение. Пусть Винтик проехал $2x$ км вперед и y км назад, тогда $2x+y = 12$ и $9x+15y = 75$ (так как вместе они проехали $3x$ км вперед и $3y$ км назад). Решая систему, получаем $x = 5$, $y = 2$. Осталось посчитать $3x–3y = 9$.

2. *Натуральное число заканчивается на ноль, а наибольший из его делителей, не равных ему самому, является степенью простого числа. Найдите предпоследнюю цифру этого числа.*

Ответ. 1 или 5. Решение. Натуральное число делится на 2 и 5. Тогда его наибольший собственный делитель — половина числа, а само число имеет вид $2{\cdot}5^k$. При $k = 1$ предпоследняя цифра будет 1, а при $k > 1$ будет 5, так как 5^k в этом случае оканчивается на 25.

3. *В выпуклом пятиугольнике ABCDE AB параллельно DE, CD = DE, CE перпендикулярно BC и AD. Докажите, что прямая, проходящая через A параллельно CD, прямая, проходящая через B параллельно CE, и прямая, проходящая через E параллельно BC, пересекаются в одной точке.*

Решение. Треугольник CDE равнобедренный, а AD — высота к его основанию. Значит, AD — биссектриса треугольника CDE, углы ADE и ADC равны. Углы ADE и BAD равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и DE секущей AD. Тогда углы ADC и BAD равны. Так как прямые BC и AD перпендикулярны одной прямой, то они параллельны, и $ABCD$ — равнобокая трапеция, откуда $AB = CD = DE$. Значит, $ABDE$ — параллелограмм. Пусть O — точка пересечения его диагоналей AD и BE, тогда $AO = OD$, $BO = OE$.



Пусть X — точка пересечения прямой, проходящей через B параллельно CE, и прямой, проходящей через E параллельно BC. Тогда $BCEX$ — параллелограмм. Точка O — середина его диагонали BE, значит она же является серединой диагонали CX. Тогда диагонали AD и CX четырехугольника $ACDX$ точкой пересечения делятся пополам. Значит, $ACDX$ — параллелограмм, то есть AX параллельно CD, и все три указанные в условии задачи прямые пересекаются в одной точке.

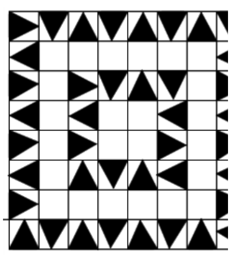
4. *В городе лжецов и рыцарей 366 жителей, все родились в разные дни високосного года. Все жители города ответили на два вопроса. На вопрос «Вы родились в феврале?» утвердительно ответили 100 человек, а на вопрос «Вы родились 30-го числа?» утвердительно ответили 60 человек. Сколько рыцарей родилось в феврале?*

Ответ. 29. Решение. На первый вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся в феврале, и лжецы, родившиеся в другие месяцы. Пусть в феврале родились x рыцарей, x не превосходит 29. Тогда в феврале родились $29 – x$ лжецов, а в другие месяцы родились $100 – x$ лжецов. Всего лжецов получается $129 – 2x$, то есть от 71 до 129 человек.

На второй вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся 30-го числа, и лжецы, родившиеся в другие числа. Пусть 30-го числа родились c рыцарей, c не превосходит 11. Тогда 30-го числа родились $11 – c$ лжецов, а в другие числа родились $60 – c$ лжецов. Всего лжецов получается $71 – 2c$, то есть от 49 до 71 человека.

Значит, число лжецов равно 71, откуда $x = 29$.

5. *В некоторые клетки доски 8×8 вписаны треугольники, у которых одна сторона совпадает со стороной клетки, а третья вершина лежит на противоположной стороне клетки. У треугольников нет общих точек. Каково наименьшее возможное число пустых клеток?*



Ответ. 24. Решение. *Оценка.* На стороне каждого треугольника лежит не менее двух вершин клеток, всего вершин 9*9=81. Тогда всего треугольников не более 40, а свободных клеток не менее 24. *Пример.* Чередуются заполненные и незаполненные концентрические кольца (см. рисунок).

Четвёртый тур дистанционного этапа III олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *У гражданина Сидорова есть ровно столько денег, сколько нужно на покупку тонны кругликов и тонны шмугликов. Если он купит на 20% кругликов больше, то ему сделают 40-процентную скидку на шмуглики, и оставшихся денег на покупку тонны шмугликов ему хватит. А, если он купит на 40% шмугликов больше, то ему сделают 20-процентную скидку на круглики, и оставшихся денег на покупку тонны кругликов ему тоже хватит. Что дороже и во сколько раз: тонна кругликов или тонна шмугликов? (И в том, и другом случае не обязательно будут израсходованы все деньги)*

Ответ. Тонна кругликов стоит вдвое дороже тонны шмугликов. Решение**.** Пусть тонна кругликов стоит x денег, а тонна шмугликов y денег. Тогда у гражданина Сидорова ($x+y$) денег. Если он купит на 20% больше кругликов, а тонну шмугликов купит с 40%-ой скидкой, то он потратит $1{,}2x+0{,}6y$ и это не больше, чем ($x+y$). Если же он купит на 40% шмугликов больше, а тонну кругликов с 20%-ой скидкой, то это будет стоить $1{,}4y+0{,}8x$, и это не больше, чем ($x+y$). Получаем два неравенства: $\begin{cases} 1{,}2x+0{,}6y \le x+y \\ 0{,}8x+1{,}4y \le x+y \end{cases}$. Из первого неравенства следует что $0{,}2x \le 0{,}4y$, т.е. $x \le 2y$. А из второго следует, что $0{,}4y \le 0{,}2x$, т.е. $2y \le x$. Сравнивая два неравенства, приходим к выводу, что $x = 2y$.

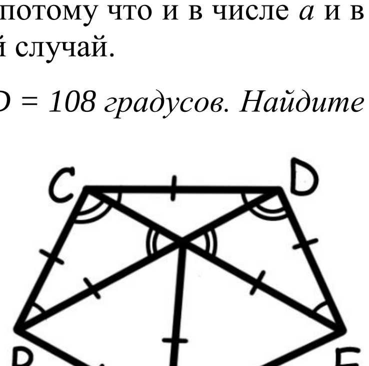
2. *Разделите прямоугольный треугольник с углом 30° на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из биссектрис второго треугольника.*

Решение**.** Пусть в треугольнике *ABC* угол *A* равен 30°, а угол *B* — 60°. Первый способ. Опускаем высоту *CD* из прямого угла на гипотенузу. Биссектриса угла *B* параллельна медиане, проведенной из вершины *D* к стороне *AC*. Второй способ. Проводим биссектрису *BE*. Тогда биссектриса (она же медиана и высота) из точки *E* в треугольнике *EAB* параллельна медиане из вершины *C* в треугольнике *CBE*. *Обоснование параллельности в обоих способах легко проводится подсчётом углов*. Третий способ. Проведем биссектрису *BE*. Так как $\angle EBA = \angle A = 30°$, то $EA = EB > EC$. Поэтому середина *AC* точка *M* лежит на *AE*, и проведенная через *M* параллельно *BE* прямая пересекает отрезок *AB* в некоторой точке *D*. Разделим *ABC* на треугольники *CBD* и *CAD*. Тогда биссектриса угла *B* в *CBD* лежит на прямой *BL* и поэтому параллельна медиане *DM* треугольника *CAD*.

3. *Три натуральных числа a, b, c подобраны так, что НОД(ab, c) = НОД(a, bc). Докажите, что после сокращения дроби a/c получится несократимая дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты с b.*

Решение. Достаточно доказать, что любое простое число *p*, входящее в разложение на простые множители числа *b*, входит в разложение числа *a* и в разложение числа *c* в одинаковых (возможно, нулевых) степенях. Докажем это. Действительно, пусть, например, в разложение числа *a* входит больше множителей *p*, чем в разложение числа *c*. Тогда в разложение числа НОД(*ab*,*c*) число *p* входит с тем же показателем, что и в число *c*. А в НОД(*a*, *cb*) входит с большим показателем, потому что и в числе *a* и в числе *cb* больше множителей *p*, чем в числе *c*. Аналогично разбирается второй случай.

4. *В пятиугольнике ABCDE AB = BC = CD = DE, ∠B = 96 градусов и ∠C = ∠D = 108 градусов. Найдите угол E.*



Ответ. 102°. Решение**.** Проведем отрезки *BD* и *CE*. Пусть они пересекаются в точке О. Заметим, что треугольники *BCD* и *CDE* равнобедренные с углом 108° при вершине, а значит, углы при основании равны 36° (они отмечены на рисунке одной дугой). Тогда $\angle BCE = \angle BDE = 72°$. Угол *COD* равен 108° (т.к. в треугольнике *COD* два угла по 36°). Поэтому $\angle COB = 180°–108° = 72°$. Углы по 72° отмечены на рисунке двумя дугами. Получаем, что треугольники *CBO* и *DEO* равнобедренные. Значит, $AB = BO = BC = CD = DE = EO = x$. Заметим, что $\angle OBA = 96°–36° = 60°$. Значит, треугольник *OBA* равнобедренный с углом 60° при вершине, т.е. равносторонний. Поэтому $AO = x$. Вычислим угол *AOE* $\angle AOE = \angle EOB – \angle AOB = 108°–60° = 48°$. Треугольник *AOE* равнобедренный с углом 48° при вершине. Поэтому $\angle OEA = (180°–48°)/2 = 66°$. Получаем, что угол *E* пятиугольника равен $\angle AED = \angle AEO + \angle OED = 66°+36° = 102$.

5. *Петя раскладывает карточки с числами 1,2,…,9 в клетки таблицы 3×3. Затем он отворачивается, а Витя меняет местами какие-то две карточки из клеток с общей стороной, и переворачивает все* *карточки лицом вниз. После этого Петя один раз показывает на одну или несколько карточек, а Витя сообщает сумму чисел на них. Сможет ли Петя действовать так, чтобы в результате гарантированно узнать, где какая карточка?*

8	1	2
3	5	9
6	7	4

Ответ. Сможет. Решение**.** Петя раскладывает карточки как нарисовано на рисунке. Потом Вася меняет местами две карточки, переворачивает их лицом вниз, а Петя указывает ему на 4 карточки, которые на рисунке отмечены серым (в них Петя сначала положил 1, 3, 7, 9). Изначально сумма на них была 20. Вася сообщает Пете, какая сумма на них теперь. Легко видеть, что для любых двух различных пар соседних карточек разности между числом на серой карточке и числом на белой карточке различны. Это относится и к тем парам, где повторяется по одной карточке. Значит, по названной сумме Петя легко устанавливает, какие карточки менялись.

Четвертый тур дистанционного этапа IV олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Можно ли из пяти одинаковых прямоугольников с периметром 10 составить один прямоугольник с периметром 22?*

Ответ. Можно. Решение**.** Можно выложить вертикально в ряд 5 прямоугольников размерами 1,5x3,5. Другой пример: поставить вертикально 3 прямоугольника 3x2, а под ними расположить горизонтально два таких же прямоугольника. Вероятно, есть и другие примеры.

2. *В треугольнике ABC AC = 1, AB = 2, O — точка пересечения биссектрис. Отрезок, проходящий через точку O параллельно стороне BC, пересекает стороны AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите периметр треугольника AKM.*

Ответ: 3. Решение. Заметим, что $\angle KCO = \angle BCO = \angle KOC$ (накрест лежащие углы). Поэтому $OK = KC$. Аналогично $BM = OM$. Поэтому $AK+AM+KM = AK+KC+AM+BM = 3$.

3. *Фирма «Рога и копыта» разделилась на фирму «Рога» и фирму «Копыта» с разным числом сотрудников. Директор фирмы «Рога» получает такую же зарплату, как директор фирмы «Копыта», и средняя зарплата всех остальных сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех остальных сотрудников фирмы «Копыта». Кроме того, средняя зарплата всех сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех сотрудников фирмы «Копыта». Что больше: зарплата директора фирмы или средняя зарплата всех остальных сотрудников?*

Ответ: Зарплата директора фирмы равна средней зарплате всех остальных сотрудников.

Решение. Пусть в фирме «Рога» m сотрудников, в фирме «Копыта» — n сотрудников, зарплаты директоров составляют по x рублей, а средние зарплаты остальных сотрудников составляют по y рублей. Тогда суммарная зарплата всех сотрудников фирмы «Рога» составляет $y(m-1)+x$ рублей, а суммарная зарплата всех сотрудников фирмы «Копыта» составляет $x(n-1)+y$ рублей. Приравнивая средние зарплаты всех сотрудников, получаем $\frac{y(m-1)+x}{m} = \frac{y(n-1)+x}{n}$ (*). После преобразований приходим к равенству $n(x-y) = m(x-y)$ (**). По условию $n \neq m$, значит $x=y$.

4. *Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше самого этого числа. Натуральное число называется элегантным, если оно имеет не менее двух собственных делителей и делится на разность любых двух из них. Найдите все элегантные числа.*

Ответ. 6, 8, 12. Решение**.** Легко проверить, что числа 6, 8 и 12 — элегантные. Пусть N — произвольное элегантное число. У нечётного числа все делители нечётные, разности делителей чётные, а нечётное число делиться на чётное не может. Поэтому, $N = 2n$. Но тогда $2n$ должно делиться на $n-2$, а значит и $4 = 2n-2(n-2)$ должно делиться на $n-2$. Значит, $n-2$ равно 4, 2, 1 или -1. Случай $n = 1$ отпадает, поскольку число 2 не имеет собственных делителей, остальные три случая дают три указанных в ответе элегантных числа.

5. *На клетчатой бумаге нарисована лента 1x2011, в первой клетке написано число 1, а в последней — число 2. Петя и Вася поочередно записывают в любую из свободных клеток числа 1 и 2. Петя ходит первым и пишет только единицы, а Вася — только двойки. Когда свободные клетки заканчиваются, Петя подсчитывает количество пар соседних клеток, в которых записаны одинаковые числа, а Вася — в которых разные. Если Петино число больше, то он выигрывает, в противном случае выигрывает Вася. Кто победит при правильной игре?*

Ответ. Вася. Решение. Разобьем клетки полоски от второй до 2011-й на пары стоящих рядом («доминошки»). Кроме того, отметим клетку 2010. Стратегия Васи: 1) пока отмеченная клетка пуста, после каждого хода Пети в клетку какой-либо доминошки ходить в другую клетку той же доминошки; 2) если Петя сделал ход в отмеченную клетку, а игра еще не завершена, сделать ход в любую клетку любой пустой доминошки и отметить вторую клетку этой доминошки. Легко проверить, что при такой игре Васи после каждого его хода отмеченная клетка пуста, вторая клетка той же доминошки заполнена, а во всех остальных доминошках либо обе клетки пусты, либо обе клетки заполнены. Кроме того, по четности последний ход — за Петей, значит, Петя не сможет вынудить Васю сделать ход в отмеченную клетку. Поэтому Вася всегда сможет сделать нужный ход.

Играя таким образом, Вася добьется, чтобы по окончании игры в каждой доминошке стояли две разные цифры, и победит, поскольку доминошек — 1005, а всего пар соседних клеток на ленте — 2010.

Четвертый тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Из квадрата вырезали меньший квадрат, одна из сторон которого лежит на стороне исходного квадрата. Периметр полученного восьмиугольника на 40% больше периметра исходного квадрата. На сколько процентов его площадь меньше площади исходного квадрата?*

<u>Ответ</u>: На 64%. <u>Решение</u>. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат со стороной 1 (и площадью 1), $KLMN$ — вырезанный квадрат со стороной x, причем KL лежит на AB (точка K ближе к A, чем L). Тогда периметр восьмиугольника $AKNMLBCD$ превосходит периметр квадрата $ABCD$ на $KN+LM = 2x = 0{,}4\cdot 4AB = 1{,}6AB$. То есть $x = 0{,}8AB$, и площадь вырезанного квадрата составляет 0,64 площади исходного.

2. *Имеется три последовательных чётных числа. У первого из них нашли наибольший чётный собственный делитель, у второго — наибольший нечётный собственный делитель, у третьего — опять наибольший чётный собственный делитель. Может ли сумма трёх полученных делителей быть равна 2013? (Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и этого числа)*

<u>Ответ</u>: Да, может. <u>Решение</u>. Вот пример: 1340, 1342 и 1344. У первого числа наибольший чётный делитель равен 670, у третьего – 672, у второго наибольший нечётный делитель равен 671. 670+671+672 = 2013. <u>Замечание</u>. Есть два естественных способа додуматься до этого примера. Можно попытаться так подобрать тройку, чтобы первое число в ней делилось на 4, т.е. имело вид $4n$. Тогда следующее число равно $4n+2$, а третье $4n+4$. Но тогда ясно, что делители, о которых идёт речь в задаче, равны $2n$, $2n+1$, $2n+2$. Остаётся решить уравнение $2n+(2n+1)+(2n+2) = 2013$. А можно просто записать число 2013 в виде 670+671+672 = 2013 и удвоить каждое из слагаемых.

3. *В параллелограмме $ABCD$ со стороной $AB = 1$ точка M — середина стороны BC, а угол AMD составляет 90 градусов. Найдите сторону BC.*

<u>Ответ</u>: 2. <u>Первое решение</u>. Проведем медиану MN в треугольнике AMD. $ABMN$ — параллелограмм, поскольку BM и AN равны и параллельны, значит, $MN = BC = 1$. Но медиана MN вдвое меньше гипотенузы AD в прямоугольном треугольнике AMD, откуда $BC = AD = 2$. <u>Второе решение</u>. Продлим отрезок AM и сторону CD до пересечения в точке K. Рассмотрим треугольник ADK. Отрезок MC параллелен основанию AD и равен его половине. Поэтому MC — средняя линия, $AM = MK$ и $KD = 2CD = 2$. Но в рассматриваемом треугольнике медиана DM совпадает с высотой, поэтому он равнобедренный и $AD = 2AB = 2$.

4. *Шарик и Матроскин ходят на лыжах по кольцевой трассе, половина которой представляет с собой подъем в гору, а половина — спуск с горы. На подъёме их скорости одинаковы и вчетверо меньше их скоростей на спуске. Минимальное отставание Шарика от Матроскина равно 4 км, а максимальное — 13 км. Найдите длину трассы.*

<u>Ответ</u>: 24 км. <u>Решение</u>. Минимальное отставание Шарика от Матроскина случается, когда Шарик находится в самой низкой точке трассы, а Матроскин — поднимается в гору (если в это время Матроскин спускается, то получается, что половина трассы короче 4 км, что, очевидно, невозможно). И оно сохраняется до тех пор, пока Матроскин не достигнет самой высокой точки. После этого Шарик поднимается еще 4 км в гору, а Матроскин спускается. Если бы Матроскин спускался все это время, то отдалился бы от Шарика (точнее, самой высокой точки) на 16 км. Но расстояние перестало возрастать, когда Матроскин опережал Шарика на 13 км, а, значит, Матроскин достиг самой низкой точки трассы и начал подниматься в гору. Поскольку отставание увеличивалось на 3 км за каждый километр, пройденный Шариком, а всего увеличилось на 9 км, то Шарику до самой высокой точки оставался $4-(13-4)/(4-1) = 1$ км в то время, как Матроскин достиг самой низкой точки. Значит, длина спуска составляет $13-1 = 12$ км, а всей трассы — 24 км.

5. *В стране лжецов и рыцарей (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) десяти людям выдали различные числа от 1 до 10. Потом каждого спросили: «Делится ли ваше число на 2?». Утвердительный ответ дали 3 человека. На вопрос «Делится ли ваше число на 4?» утвердительный ответ дали 6 человек. На вопрос «Делится ли ваше число на 5?» утвердительно ответили 2 человека. Какие числа получили лжецы?*

<u>Ответ</u>: Лжецы получили номера 2, 5, 6, 10. <u>Решение</u>. Рассмотрим людей под номерами 4, 5, 8, 10. Ответы только этих людей на второй и третий вопросы могли отличаться. На второй вопрос ответило утвердительно на 4 человека больше, чем на третий. Это означает, что все люди под указанными номерами ответили «да» на второй вопрос и «нет» на третий. Но изменить ответ с «да» на «нет» могут

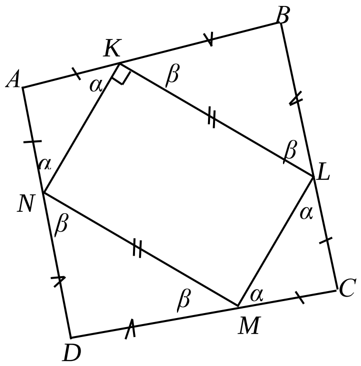
только рыцари с номерами 4, 8, и лжецы с номерами 5, 10. Значит, номера 4 и 8 получили рыцари, а номера 5 и 10 — лжецы. Теперь ясно, что на второй вопрос все лжецы должны дать утвердительный ответ, и потому лжецов ровно четверо. В то же время на первый вопрос отвечают «да» только те лжецы, которые имеют нечётные номера и, значит, такой всего один (5), а лжецов с чётными номерами трое. Поэтому лжецам принадлежат оставшиеся «нераспределёнными» чётные номера 2 и 6, что и завершает решение.

Четвёртый тур дистанционного этапа VI олимпиады имени Леонарда Эйлера

1. *Разбойники засыпали сундук доверху золотым и серебряным песком, причём золотого песка насыпали в 2 раза больше по объему, чем серебряного. Али-Баба посчитал, что, если высыпать половину серебряного песка и досыпать сундук доверху золотым песком, цена сундука поднимется на 20 процентов. Как и на сколько процентов изменится стоимость сундука, если высыпать половину золотого песка и досыпать сундук доверху серебряным песком?*

Ответ. Уменьшится на 40%. Решение. Пусть изначально объём серебряного песка в сундуке равен A, стоимость единицы объёма золотого песка составляет x, а стоимость единицы объёма серебряного песка составляет y. Тогда изначальная стоимость сундука составляет $2Ax+Ay$. Стоимость сундука по подсчётам Али-Бабы составляет $2{,}5Ax+0{,}5Ay$, что приводит к равенству $1{,}2(2Ax+Ay) = 2{,}5Ax+0{,}5Ay$ и соотношению $x = 7y$. Тогда во втором случае стоимость сундука составит $Ax+2Ay = 9Ay$, что по отношению к исходной стоимости, равной $2Ax+Ay = 15Ay$, составляет 60%.

2. *На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD выбраны соответственно точки K, L, M, N так, что AK = AN, BK = BL, CL = CM, DM = DN и KLMN — прямоугольник. Докажите, что ABCD — ромб.*



Решение. Треугольники ANK, BKL, CLM и DMN — равнобедренные по условию. В равнобедренных треугольниках углы при основании равны. Пусть $\angle AKN = \angle ANK = \alpha$, $\angle BKL = \angle BLK = \beta$. Так как угол NKL прямой, $\alpha+\beta = 90°$. Но $\angle KLB+\angle MLC = 90°$, значит $\angle MLC = \angle LMC = \alpha$. Аналогично рассуждая, получаем $\angle NMD = \angle MND = \beta$. Поскольку $NK = LM$ как противоположные стороны прямоугольника, треугольники AKN и CLM равны по стороне и двум углам. Аналогично равны треугольники BKL и DMN. Тогда $AK = AN = CL = CM$, $BK = BL = DM = DN$, откуда следует, что все стороны четырехугольника $ABCD$ равны.

3. *К переправе подошли царевна Соня и 7 богатырей. Богатыри выстроились в ряд так, что каждые двое рядом стоящих богатырей — друзья, богатыри, стоящие не рядом, между собой не дружат, а царевна дружит со всеми кроме среднего богатыря. Имеется одна лодка, в которой могут плыть либо двое друзей, либо трое попарно дружащих (в одиночку плыть нельзя). Смогут ли переправиться все подошедшие к переправе??*

Ответ. Смогут. Решение. Обозначим С царевну, и пронумеруем богатырей от 1 до 7 по порядку (Соня не дружит с 4-м). Буква и цифры обозначают, кто в лодке, стрелка → переправу на другой берег, стрелка ← — путь обратно. Работает следующий алгоритм:

С12→, С1←, 34→, 23←, С56→, С6←, С12→, С2←, С23→, С5←, С56→, С6←, С67→.

4. *Петя и Вася играют на клетчатой доске 20×20. Каждым ходом игрок выбирает клетку, у которой все 4 стороны не окрашены, и красит все стороны в красный и синий цвета в любом порядке (например, может покрасить все в один цвет). При этом не должно получаться отрезков одного цвета длиной более чем одна сторона клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Петя. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?*

Ответ. Выигрывает Вася. Решение. Вася разбивает все клетки доски на пары центрально симметричных, и ответным ходом красит стороны клетки из той же пары так, чтобы центрально симметричные стороны были покрашены в *разные* цвета. Пока Васина стратегия действует, после его хода в каждой паре центрально симметричных сторон либо обе стороны окрашены в разные цвета, либо обе стороны не окрашены.

Докажем, что Вася всегда может сделать ход. Во-первых, у центрально симметричных клеток нет общих сторон. Поэтому Петя, делая ход, не сможет одновременно окрасить две центрально симметричных стороны. Во-вторых, если 4 окрашенные Петей стороны ограничивают клетку, то и 4 центрально симметричные им стороны тоже ограничивают клетку, и все они не окрашены. Вася может их красить.

Покажем, что, действуя по стратегии, Вася не образует запрещённых одноцветных отрезков. Пусть покрашенная Васей сторона AB продолжила уже покрашенную сторону BC. Если B — центр доски, то стороны AB и BC центрально симметричны, и покрашены по Васиной стратегии в разные цвета. Иначе AB и BC центрально симметричны сторонам $A'B'$ и $B'C'$, при этом Петя предыдущим ходом смог покрасить сторону $A'B'$, значит, $A'B'$ и $B'C'$ — разного цвета. При смене цветов на противоположные они останутся разного цвета, так что AB и BC — разного цвета, и отрезок AC не запрещён.

Итак, по указанной стратегии Вася может всегда сделать ход, поэтому он не проиграет. А так как доска конечна и игра закончится, Вася выиграет.

5. *Какое наибольшее количество двузначных чисел можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты, а любые два несоседних числа – взаимно просты?*

Ответ. 10. Решение. Десять чисел написать можно: 11, 77, 91, 65, 85, 51, 57, 38, 46, 23. Пусть нам удалось написать 11 таких чисел. Выпишем для каждой пары соседних чисел их общий делитель, отличный от 1. Получится 10 чисел, любые два из которых взаимно просты. Все эти числа либо однозначные, либо двузначные. Но нельзя выбрать более четырёх однозначных чисел, отличных от 1, любые два из которых взаимно просты. Поэтому в построенном ряду из 10 чисел будет не менее шести двузначных. Значит, какие-то два из них стоят рядом, и какое-то из чисел исходного ряда делится на каждое из них. Но, поскольку они взаимно просты, оно делится и на их произведение. А двузначное число не может делиться на произведение двух двузначных чисел.